

کتابخانه تصفیہ کار عالی حمید آباد کراچی

۱۲۳۶

نمبر و خلد

تاریخ و خلد

نام کتاب

نوع کتاب

نمبر کتاب و نوع مذکور

اصول ہندو

ریاضی

— —



۴۴
راهی

هو

۱۲۳۴
مرد

اصول هندکند

از مقرب الخاقان

اقامیه از عبدالغفار

نجم الملک سرتیپ مستدین و معلم کل
و مؤلف علوم مرصع

ورمدر



مبارک نظامیه

طهران

۱۲۹۲

داخله منبیه	۷۲۳۶
فن منبیه	ب م
کتاب منبیه	۹

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على محمد وآله اجمعين
و بعد که پوشیده نیست که از آنجا که تاج و تخت خسروی بفرق فرقد ساری
و قدم عالم آرای ملک الملوک و سلطان السلاطین خدیو خدیوان کامکار
اعلی حضرت اقدس شهریار جمشید زمان سایه نروان سلطان بن سلطان
و انخاقان بن انخاقان ناصر الدین شاه قاجار خداوند ملک و دوله
مباهی و مزین گردیده دولت را نظامی تازه و ملک را اسطفا می بنی اندازده حاصل
بقسمیکه همه چیز را تفاوت و توفیر معلوم است خاصه علوم را که در عدد رسوم
دارند و در شمار امارت ماس بود و بیشتر وجه بهمت این خسروا علی نعمت از اول دولت
روز افزون آید و تجدید این مراسم و افشا و تشدید این عایم بوده و است
چنانچه تفویض منصب جلیل پیل وزارت علمیه بشخص اکمل و فردا و احد و آب و است
اشرف امجد و الا اعضاد استلطفه علی قلی میرزا ادا م الله مجده و بنای سده
مبارک و دانشمندان کثرت معلّمین فخر و متعلّمین مستعد و بذل مبالغه خیره
در این راه هر یک بی شبهه شاهدی عدل و کوبای این است منت چه ضعیف

تو خود سیاه و چون بقصای اراده علیه بایونی موساعی جمله وزیر علوم و انبیاست
 و ایضا مقربا الحاقان جنتی بای برتر و رئیس و موهبت تادم مقربا الحاقان محمد حسین خان
 سیرت و نظم بر او قاجار جمع فنون خاصه ریاضی زانید الوصف و ایراست و مدد
 سایر فنون و صنایع بر مقدمات است خاصه بر علم حساب و هندسه
 لهذا حقیر جانی ابن الفاضل الکامل علی محمد عابد الغفار اصغما فی محض ادای
 شکر نعمت و استرضای خاطر ملکوتی مطا بهر خدمه و اندوخته خدمت در حضرت
 وزارت علیه و اشفاق عموم متعلمین مدرسه مبارکه دار الفنون و غیره کتب
 در اصول فنون ریاضی با اندازه و مکرر تالیف ترجمه نموده در اصول حساب کتب^{۱۲}
 ذکر نموده سبب تالیف آن کتب را از جمله آن علوم هندسه اولی است و هندسه
 کتابی که در این علم میان ما بوده هندسه اقلیدس است که در زمان مامون بن ابی
 ازخت یونانی بفری ترجمه شد و بعد سلطان المحقق خواجه نصیر علیه الرحمة
 از آن تحریر فرموده اسلوب آن کتاب بعد از وضع قانون جدید و تحصیل سپیدی
 ثبت چونکه در اصل کتاب اقلیدس اصول و فروع مخلوط اند و بعد از آن خواجه
 علیه الرحمة در تحریر آن برای هر شکل وجه اخری ذکر فرموده اند و بلکه در اکثر اشکال
 وجه عده و جهت خلاف وقوع بسیار بیان نموده اند مانند شکل عروس که ۱۴۹
 وجه در آن ذکر شده و چنین کتابی تحصیل مبتدی مناسب نیست و مقصود حقیر نه
 تو بهین آن کتاب است ابتدا بلکه اشاره بعد منسبت است و است برای مبتدی
 ولی مطالعات برای تبیین و تصرف در بر همین و وسعت خیال بسیار خوب است
 باجمعه دو کتاب هم در مدرسه مبارکه ترجمه شده یکی از آنها اگر چه خوش اسلوب است
 ولی ناقص می باشد و حروف اشکالش فزنی و کتاب دیگر معاش بسیار حقیر برای
 مدرسه مبارکه دار الفنون و دو کتاب در اصول هندسه نوشت یکی تالیفی است بسوط

اصول و فرضیات از هم متنازع و ضمیمه دارد و مشتق بر مسائل مفیده و رسمیه بسیار که در مورد زندگی بکار آیند و دیگر همین کتاب موجود است که اسلوبی دارد پسندیده چونکه اصول جمیع مطالب بنده است و اولی بطریق اختصار و بعبارتی مافوق در آن درج شده و نظریات این نکته برای مبتدی مناسب تر است و این اسلوبی است که تاکنون چندین تغییر و تصرف در آن شده تا باینجا رسیده و بفعلاً برای تحسین با انتظام نر و عموم مهندسين مختار افتاده و مشتمل است بر هشت مقاله

اول در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرد

دو مقیم در خواص دایره و مقیاس زوایا

سوم در خواص اشکال کثیره الاضلاع و مساحت و تشابه آنها

چهارم در خواص اشکال کثیره الاضلاع منقطع و مساحت دایره

پنجم در خواص اشکال قضائیه یعنی خطوط و سطوحیکه در سطحی مستوی انجمنند

ششم در خواص اجسام کثیره الطول

هفتم در خواص کره و متعلقاتش

هشتم در مساحت اجسام مستدیره که یعنی کره و استوانه و مخروط

و در اصول احکامیکه در این کتاب مبرهن شده ۲۸۳ است و عدد نتایج

و شرح و پتیهائی که در حقیقت احکام فرعی اند قریب به ۱۰۰ و عدد احکام مبرهن

منو در فی که بی دلیل ذکر شده ۶۴ و عدد مسائل حل کردنی که جوابهاشان

پایان شده ۷۵ و مجموعاً ۵۰۴ عدد باشد پس بر متعلمین که بخواهند هندسه

شوند اقبال لازم است که صور سبع این احکام احلییه و فرعیه انجواطر سپارند اگر نتوانند

علاوه بر آنها برابر این را حفظ کنند

و ترتیب این علم در علوم تحصیلیه بعد از اصول حساب است یا بعد از اصول جبر و مقابله

مقاله اولی

در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفیده

حدود

- ۱ مکان متصرفی محدود جسم را در فضاء نامحدود این عالم حجم گوئیم
- ۲ حدی که مفروض یک جسم را از فضاء محیطش سطح گوئیم
- ۳ محل تلاقی دو سطح جسم را خط گوئیم
- ۴ محل تلاقی دو خط را نقطه گوئیم
- ۵ بنا بر این تعریفات حجم و سطح و خط بی تصور جسم و وجود خارجی پیدا نکنند ولی در هندسه آنها را قائم بالذات فرض میکنیم و غیر متعلق با جا میگردانیم و در دنیا
- ۶ حجم و سطح و خط را عموماً شکل گوئیم
- ۷ فایده علم هندسه که مساحت و وسعت اشکال است و معرفت بخواص آنها
- ۸ خط مستقیم خطی است غیر محدود که چون دو نقطه بر آن فرض کنیم قطعه و قعه مابین آن دو نقطه از آن خط اقصا فاصله باشد مابین آن و عبارت آخری خطی است که وضعش مابین آن دو نقطه ثابت و تغییر نپذیرد و ما هر جا خط مطلق گوئیم مقصود مستقیم و از واضحیات است که اگر دو خط در جبهه ای از طول خود بر هم منطبق باشند در باقی طول البته منطبق میشوند

- ۹ خط منکسر و شبهه کثیر الاضلاع خطی است مرکب از اجزای مستقیمه
- ۱۰ خط منحنی آنست که نه مستقیم باشد نه مرکب از اجزای مستقیمه
- ۱۱ سطح مستوی آنست که چون دو نقطه غیر مشخص بر او فرض شود

بنیادهای
تمام اشکال این عالم
عبر شده و محیط
زاد و برتر و قشنگ
رو زنده و در و نیم
همه که از هندسه
تعلق خود را به عالم
فان هندسه را در نظر
چنانکه اید
لحمه و سببانی در آن
واقع شده باشد

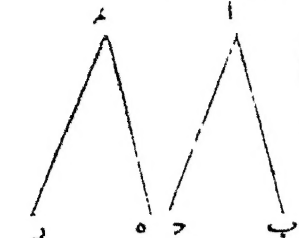
پایین آن دو بجای مستقیم وصل شود تمام این خط بر سطح واقع شود و ما هر جا سطح منطبق کوئیم مقصود میشود است

۱۲ سطح منحنی آنست که نه مستوی باشد نه مرکب از اجزای مستویه

۱۳ وضع کیفیتی را که از تقاطع دو خط مستقیم اب و ا ح حادث شود زاویه کوئیم

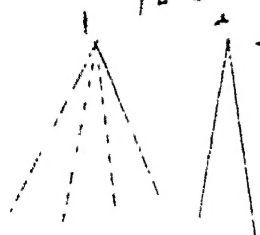
و نقطه ا راس زاویه است و دو خط

ا ب و ا ح ضلعینش



زاویه را گاه بحرف ر کس ا بنماییم و گاه به حرف ب ا ح یا ح ا ب بنا بر آنکه حرف ر کس در وسط افتد

و در زاویه ا و ب را متساوی کوئیم هر گاه بتوان آنها را درست بر هم منطبق نمود فرض میکنیم زاویه ب بر ا نقل شود برو جی که ب ه برابر واقع شود آنوقت اگر د و بر ا ح منطبق گشت و د زاویه را متساوی کوئیم



زاویه را کوئیم مضایف و ثلاثه امثال و ...

زاویه ب است هر گاه و و مثل این زاویه

یا سه مثلش و غیره در آن بچند

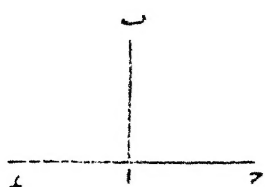
و از این قرار زوایا مثل سایر مقادیر متعین

پذیرند و میتوان آنها را به هم دیگر بسنجند

۱۴ هر گاه خط ا ب خط ح د را

برو جی تلاقی کنند که دو زاویه مجاوره ب ا ح

و ب ا د متساوی شوند خط ا ب را



نسبت به α عمود کوئیم و آن دوزاویه را قائمه
و عن قریب مبرهن شود که از نقطه مفروضه α از خط α میتوان عمودی
آن خط منسراج نمود و اینکه جمیع زوایای قائمه متساوی هستند
هر زاویه که از قائمه بزرگتر باشد منفرجه و اگر کوچکتر باشد حاده
دوزاویه را متمم و تمام هر یک کوئیم هرگاه مجموعشان یک قائمه باشد
و مکمل و کمال همدیکه کوئیم هرگاه مجموعشان دو قائمه باشد

۱۵ دو خط واقع در سطحی را متوازی کوئیم
هرگاه از یک جهت متوازی نشوند هر چند پهنایت آنها
داده شوند در جهتین مثل دو خط α و β
عاشق سطحی است که از جانب بخوبی منتهی شد
پس اگر خط مستقیم باشد و سمت محدوده را شکل مستقیمه از اضلاع و کثیرات
مجموع خطوط را محیط آن شکل

۱۶ ساده تر جمیع اشکال کثیر الاضلاع آنست که صاحب سه ضلع باشد و آن را
مثلث کوئیم

و اگر دارای چهار ضلع باشد ذواربعه اضلاع پنج ضلعی ذو خمس اضلاع و
۱۸ مثلث متساوی الاضلاع کوئیم هرگاه هر سه ضلعش مساوی
باشد و متساو الساقین هرگاه دو ضلعش مساوی باشند و مختلفه

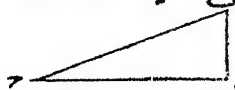
الاضلاع

اگر هیچ کدام
برابر نباشند



۱۹ مثلث قائم الزاویه است که یک زاویه اش قائمه باشد و ضلع

مقابل آن زاویه را وتر مطلق گوئیم مثلث abc و زاویه او c وتر c



۲۰ در هر دو اشکال ذوا ربعا ضلع مربع است

شکل است که جمیع اضلاعش مساوی باشند و جمیع زوایایش قائمه

و دیگر مربع مستطیل یا مستطی و آن زوایایش قائمه

و ضلع مقابل مساوی

و دیگر متوازی الاضلاع یا شبه معین

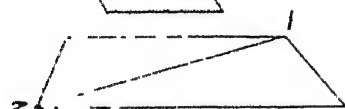
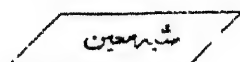
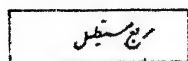
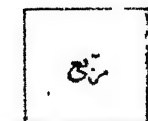
و آن ضلع مقابلش متوازی باشند

و دیگر معین و آن اضلاعش مساوی باشند ولی

زوایایش قائمه نباشند

و دیگری ذوزنقه است

و آن دو ضلعش شامتوازی است



۲۱ و هر شکل قطر خطی است حاصل باین دو زاویه غیر مجاوره مثل ad

۲۲ و اکثر الاضلاع متساویه الاضلاع است که اضلاعش مساوی باشند

و متساوی الزوایا است که زوایایش مساوی باشند

۲۳ و اکثر الاضلاع را متساوی الاضلاع گوئیم نسبت به دیگر

هرگاه اضلاعشان نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی مرتب باشند یک ترتیب

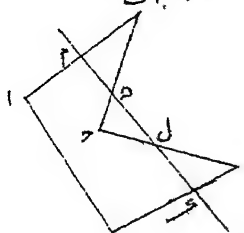
بر وجهی که ضلع اول یکی مساوی باشد بضلع اول دیگر و ضلع دوم به دوم و هكذا

و از این وی معنی دو اکثر الاضلاع متساوی الزوایا نیز معلوم است

و در این صورت هر ضلع مساوی با دو زاویه مساویه را متقابل و متناظر گوئیم

۲۴۰ کثیر الاضلاع محذب است که هر ضلعش را امتداد دهیم تا همگی در یک خط قرار گیرند و محیط چنین کثیر الاضلاع را خط مستقیم می‌نامند و نقطه قطع کنند و اگر در مثل شکل ا ب ح د ه خط م ح را محیطش را بر چهار نقطه م و ن و د و ل و ح قطع کند بسبب اینست که مثل ا ضلع ب ح که در پایین بر نقطه ن قطع شده در یک طرف مثل نیفاذه یعنی آن شکل محذب نیست

تنبیه چهارم مقاله اول این کتاب در اشکال مسطحه است یعنی اشکالی که خطوط آن از یک سطح مستوی خارج نباشد



در شرح اصطلاحات و علامات

علم و متعارف حکمی است که فی نفسه واضح باشد و بی نیاز از تعلیل نباشد مثلاً قضیه حکمی است محقق که واضح نشود و جز بعد از قیاس و دلیل و برهان مستلزم مطلبی است و از آنکه اقتضا کند راه جوابی را

اصول موضوع حکمی است محقق برای برهان قضیه یا در حل مسئله است که شامل ایراد لفظی است شرک که تعلق گیرد به بعضیه و به هم باشد و هم با اصول موضوعه فیتجه حکمی است مستند از یک ایراد یا بیشتر

شرح تبیینی و توضیحی است ایراد سابق آنکه همیشه که از آن روی معلوم شود رابطه و فایده و حصر و عمومیت آنها

فرض قرار دادیت در بیان ایراد یا و اقامه برهان

اینصورت = علامت مساوات است مثلاً $a = b$ یعنی a مساوی b است

در مقام خودش شرح خواهیم داد

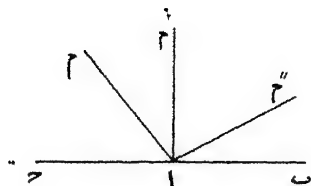
این صورت ۱۴ علامت استخراج ضلع است مثلاً ۲۴ بمعنی جذر ۲ است
و ۷۴ بمعنی جذر حاصل ضرب ۷ است یا واسطه هندسی میان
بقیه کاه در ضمن دایم طلب می‌باشیم بنماییم بعضی روابط را که باین اشکال
باشد از قبیل تشابه در این صورت هرگاه شکلی را بحروف ا و ب و ج و د و ...
بنماییم شکل دیگر را نیز بهین حروف بنماییم ولی با علامتی باین صورت ا و ب و ج و د و ...
و تلفظ کنیم الف یک و ب یک و غیره یا باین صورت ا و ب و ج و د و ...
و تلفظ کنیم الف دو و ب دو و جیم دو و غیره و هكذا
بسیار اشاق می‌آید که مطلبی را بشکل یا بقتضیه سابق تذکری حواله دهیم آنوقت
باین صورت مثلاً بنماییم ۱۶ و ۱۲ یعنی بجمع کنیم بشکل ۱۶
از مقاله حاضر و به قضیه ۱۲ از مقاله ششم

علوم متعارف

- ۱ دو مقدار مساوی با مقدار ششم مساوی باشند
- ۲ کل نر کرات از جنس و خود
- ۳ کل مساویت با مجموع اجزای خود
- ۴ مابین دو نقطه را شعاع واصل نمود جز بیک خط مستقیم
- ۵ دو مقدار را خط باشند یا سطح یا حجم مساوی گوئیم در آن صورت که هرگاه یکی از
آنها را بردیک قرار دهیم در تمام وسعت خود برهم دیگر منطبق شوند

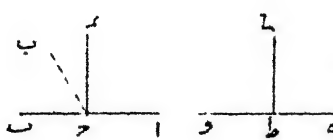
قضیه اول

از نقطه مفروضه بر خطی میتوان یک عمود بر آن خط اخراج نمود بدین
 براهان فرض میکنیم am اول منطبق باشد بر ac و بعد حول نقطه a
 دوران کند و حادث نماید و زاویه مجاوره



am و ac را که اولیش am است
 ابتدا بسیار کوچک است و متدرجاً بزرگتر
 میشود و متیش am است ابتدا بزرگتر از ac است
 و متدرجاً بزرگتر میشود تا صفر رسد یا حرکت

زاویه am را که ابتدا کوچکتر بود از ac زود بزرگتر میشود و از این قرار در آن
 مابین موضعی برای خط متحرک پیدا میشود مثل am که آنجا دو زاویه مساوی باشند
 و ظاهر است که پیش از یک موضع پیدا نشود



بدینجهت که تمام زوایای قائمه مساوی باشند
 مثلاً خط ac عمود است بر ab و ac ط
 بر ac و کوچکتر زاویه ac مساوی است با

ac ط ac

برهان خط ac را نقل میکنیم بر ab چنانچه ط بر ac واقع شود
 آن وقت ط ac واقع میشود بر ac و آن لازم آید که از نقطه مفروضه بر خطی بتوان
 دو عمود بر آن خط اخراج نمود

قضیه دوم

چون خط ac تلاقی کند ab را مجموع دو زاویه مجاوره ۱۸۰°

مقاله اول

۱۲

و ب د مساویست با د و قائمه

برهان اگر نقطه د عمود ح ه را بر خط ا ب

اخراج کنیم آنوقت زاویه ا ح د مساوی میشود

با مجموع د و زاویه ا ح ه و ه ح د پس ا ح د

ب د مساوی میشود با مجموع د و زاویه

ا ح ه و ه ح د و ب د و زاویه اول قائمست و مجموع د و زاویه دیگر نیز قائمه

ب د ه است پس مجموع د و زاویه ا ح د و ب د بقدر دو قائمه است

نتیجه ۱ اگر یکی از دو زاویه ا ح د و ب د قائمه باشد دیگر نیز قائمه است

نتیجه ۲ اگر د عمود باشد بر ا ب پس بعکس آن نیز عمود باشد بر ا ب

برهان چون د عمود است بر ا ب زاویه ا ح د

مساوی میشود با مجاوره خود د ح ب و هر دو قائم اند

و چون ا ح د قائم شد مجاوره اش ا ح ه نیز قائمه

باشد پس زاویه ا ح ه ب د مساویست

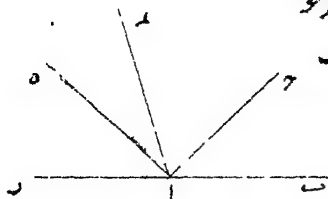
عمود است بر د ه

نتیجه ۳ - زوایای متقابلیه ص و ح ا د و د ا ه و ه ا ر که در یک

سمت خط ب ر حادث گشته اند مجموعشان

مساویست با دو قائمه زیرا که این مجموع بقدر مجموع

د و زاویه مجاوره ب ا ح و ح ا ر است

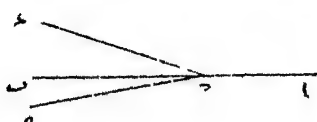


قضیه سیم

هرگاه مجموع دو زاویه مجاوره $ا د ه$ و $د ب ح$ دو قائمه باشد پس
 دو ضلع خارجی $ا ح$ و $د ب$ بر استقامت خطی واقع میشوند
 بر آنها اگر $د ب$ بر استقامت $ا ب$ باشد

فرض میکنیم $د ه$ بر آن استقامت باشد و آنوقت

خط $ا د ه$ مستقیم است و بنا بر این مجموع دو
 زاویه $ا د ه$ و $د ب ح$ دو قائم میشود



ولی بفرض مجموع دو زاویه $ا د ه$ و $د ب ح$

دو قائم بود پس $ا د ه + د ب ح = ا د ه + د ب ح$ و از طرفین $ا د ه$ را حذف

میکنیم باقی میماند $د ب ح = ا د ه$ یعنی جزو مساوی کل و این محال است پس $د ب$

واقع است بر استقامت $ا ح$

قضیه چهارم

چون دو خط $ا ب$ و $د ه$ متقاطع شوند دو زاویه متقابل به برابری باشند

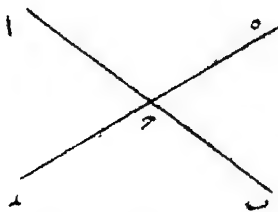
برهان چون $د ه$ مستقیم است مجموع

دو زاویه $ا د ه$ و $ا ح د$ دو قائم باشد چون

$ا ب$ مستقیم است مجموع دو زاویه $ا د ه$ و

$د ب ح$ نیز دو قائم است پس $ا د ه + د ب ح$

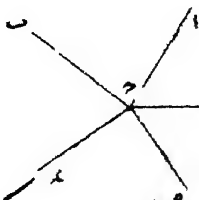
$ا د ه = ا د ه + د ب ح$ و چون $ا د ه$ را



از طرفین استقاط میکنیم باقی میماند $ا د ه$ مساوی با مقابل خود $د ب ح$

و همین وجه ثابت میکنیم که زاویه $ا د ه$ مساویست با مقابل خود $د ب ح$

شرح مجموع چهار زاویه حادثه در حول نقطه تقاطع دو خط مساویست با چهار قائمه



زیرا که مجموع $a + b + c + d$ دو قائمه است

و نیز مجموع $a + b + c + d$ دو کلیتاً اگر چند

خط مثل $a + b + c + d$ و غیره بر نقطه تقاطع

شوند مجموع زوایای متوالیه $a + b + c + d$ و دره

و در $a + b + c + d$ مساوی میشود با چهار قائمه زیرا که اگر بر نقطه c دو خط رسم کنیم عمود بر یکدیگر

حادث میشود چهار قائمه و مجموع آنها مساویست با مجموع زوایای مذکور $a + b + c + d$

قضیه پنجم

هرگاه بر نقطه e از خط ab دو خط c و d در طرفینش چنان

رسم کنیم که دو زاویه c و d مساوی شوند گوئیم c و d بر خط ab

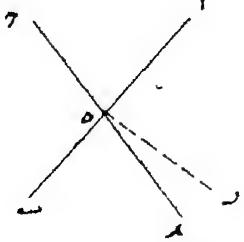
c واقع میشود

برهان فرض میکنیم c و d بر استقامت c

باشد آنوقت بنا بر $c = a$ و $d = b$

و بنا بر فرض $c = a$ و $d = b$ پس $c = d$

مساوی میشود با c و این محال است



قضیه ششم

هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها مساوی باشد با دو ضلع و زاویه

بین آنها از مثلث دیگر نظیر بنظیران دو مثلث مساوی باشند

مثلاً زاویه $a = زاویه د$ و ضلع $ab = ضلع اد$ و میگوئیم

$ab = د$



برهان بطلان تطابق

ضلع ده را قرار میسیم

برابر بطوریکه نقطه

بر ا واقع شود و نقطه ه بر ب آنوقت زاویه د چون مساویت با زاویه ا ضلع
د و واقع می شود بر استقامت ا و بفرض د مساویت با ا پس
نقطه د واقع می شود بر ب و ضلع سیم د و منطبق می شود بر ب و بنا بر این
مثبت د و برابر ا

نتیجه از اینکه دو مثلث که برخورد مساوی باشند زاویه ا = د و ضلع ا ب =
د و ضلع ا د = د استباط می شود که برخورد دیگر نیز مساوی می شوند
زاویه ب = ه و زاویه ج = د و ضلع ج د = ه و

قضیه هفتم

هرگاه دو زاویه ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه
و ضلع بینهما از مثلث دیگر نیز بنظر آید و مثلث متساوی هستند
مثلاً در شکل سابق ضلع ج د = ه و زاویه ب = ه و زاویه ج = د و
و کو هم مثلث د و مساویت با مثلث ا ب

برهان بعمل انطباق ضلع ه د واقع می شود بر مساوی خود د و نقطه
ه بر ب و نقطه د بر ج و زاویه ه چون مساویت با ب ضلع ه
واقع می شود بر استقامت ج ا و بنا بر این نقطه د واقع می شود بر نقطه
از خط ج ا و همچنین زاویه د چون مساویت با ج خط د و واقع می شود
بر استقامت ج ا و نقطه د بر نقطه ا و ضلع ج ا پس نقطه د مساویت

یک مرتبه واقع شود بر دو خط a و b پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها نقطه
 a و آنوقت دو مثلث درست منطبق میشوند و متساوی میگردند
 نتیجتاً از اینکه دو مثلث بر خط متساوی باشد ضلع $b = c$ و زاویه
 $b = c$ و زاویه $d = e$ چنین استنباط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی
 میشوند ضلع $a = d$ و $a = e$ و $d = e$

قضیه هشتم

در هر مثلث هر ضلع اقصی است از مجموع دو ضلع دیگر



برهان خط b چون میقسم است اقصی فاصله

باشد ما بین دو نقطه b و c بعد پس b

اقصی است از مجموع a و c

باید نیز دانست که هر ضلع اعظم است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً ضلع b بزرگتر

از c میگیریم و دو ضلع دیگر را b و c آنوقت بحکم همین شکل $a + c$

و چون c را از طرفین اسقاط کنیم چنین میشود $a - c$ یعنی b اعظم است

از تفاضل a و c و چون b را اسقاط کنیم $a - b$

قضیه نهم

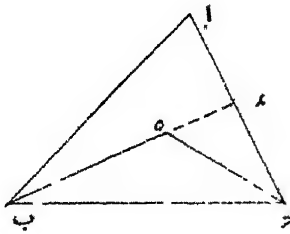
چون از نقطه e مفروضه در داخل مثلث a و b دو خط b و c

و از طرفین ضلع b وصل کنیم مجموع این دو خط اقصی است از مجموع دو خط

a و c

برهان خط b را امتداد میدهم تا c را بر نقطه d قطع کند آنوقت بنا بر

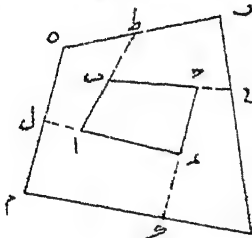
قضیه d اقصی است از مجموع $e + d$ و چون b را بر طرفین



مفرازیم چنین میشود $د ه + ه ج + ج د$ $ه ا + ا ب + ب ا$
 $ه ب + ب ج + ج ا$ یا $ا ب + ب ج + ج ا$ و چون
 $د ه + ه ج + ج د$ را بر طرفین بیفزاییم چنین میشود
 $ه ا + ا ب + ب ا$ و چون این ا بنا
 مساوات سابق بنحیم بطریق اولی چنین میشود $د ه + ه ج + ج د$ $ه ا + ا ب + ب ا$

قضیه ششم

محیط هر کثیر الاضلاع محذب مثل $ا ب د ه$ اقصر است از هر نوع خطی مثل $ا ج$
 ب که از اطراف بر او احاطه کرده باشد
 برهان اضلاع کثیر الاضلاع $ا ب د ه$ را در یکجمله
 امتداد دهید تا منتهی شوند بخط محیط آن وقت
 این چند نامساوات نتیجه شود



$$\begin{aligned} ا ب + ب ج + ج د &> ا ج + ج د + د ه + ه ا \\ ب ج + ج د + د ه + ه ا &> ب د + د ه + ه ا + ا ب \\ ج د + د ه + ه ا + ا ب &> ج ه + ه ا + ا ب + ب ج \\ د ه + ه ا + ا ب + ب ج &> د ا + ا ب + ب ج + ج د \\ ا ب + ب ج + ج د + د ه + ه ا &> ا ج + ج د + د ه + ه ا \end{aligned}$$

و بعد از جمع آنها واسقاط مشترکات چنین میشود

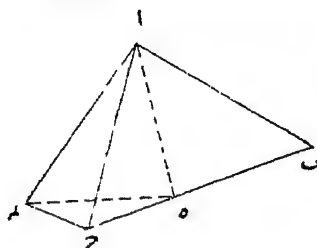
$$ا ب + ب ج + ج د + د ه + ه ا > ا ج + ج د + د ه + ه ا$$

و بعین وجه نیز ثابت میشود که محیط هر خط منکسر محذبی اقصر است از خط احاطه کننده
 که بطرفین آن منتهی شده باشد

مقاله اول

قضیه نایزدهم

هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر
و زاویه حادته مابین دو ضلع اول اعظم باشد از زاویه حادته مابین
دو ضلع دویم کوئیم که ضلع سیم مثلث اول طول است از ضلع سیم مثلث
دوم و مثلث را چنان ترتیب میدسیم که



ضلع AD در هر دو مشترک باشد و دو
ضلع مساوی دیگر AB و AE در طرفین
آن باشند و فرض نیست که زاویه BAC

< DAE

زاویه BAC را بخط AE نصف میکنیم این خط واقع شود در زاویه اعظم BAC
و خط AE را وصل میکنیم آن وقت بنا بر فرض دو مثلث BAC و DAE
و AE مساوی میشوند پس $BAC = DAE$ ولی در مثلث BAC ضلع BC
< $DE + AC$ و چون در این نامساوات AE را بدل کنیم به BAC چنین میشود

$BC < AC + AE$ یعنی $BC < AC + AD$

و بالعکس اگر دو ضلع AB و AD از مثلث ABC مساوی باشند
به دو ضلع AD و AE از مثلث ADC و ضلع سیم AC از مثلث اول طول
باشد از ضلع سیم BC از مثلث دویم کوئیم زاویه BAC اعظم است از
زاویه DAE زیرا که اگر این زاویه کوچکتر بود از DAE لازم می آمد که BC
اقص باشد از $AC + AD$ و این خلاف فرض است و اگر مساوی بود با $AC + AD$
آن وقت بنا بر فرض BC مساوی میشد با $AC + AD$ و اینکم نیز خلاف فرض است

قضیه دوازدهم

هرگاه سه ضلع مثلثی مساوی باشند با سه ضلع مثلث دیگر
نظیر نظیر آن دو مثلث متساوی هستند

مثلاً ضلع $ا ب = ا ح = د ه$

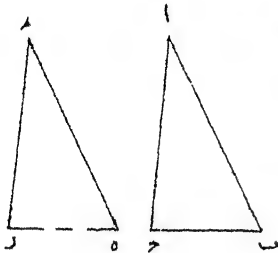
و $ب د = د ه$ و میگوئیم زاویه $ا =$

$د$ و $د ه = د ه$

بنها اگر زاویه $ا$ مثل $د$ بزرگتر بود از

زاویه $د$ چون دو ضلع $ا ب$ و $د ه$ مساوی

هستند و ضلع $د ه$ و $د د$ نظیر نظیر



پس بگوئیم قضیه سابقه ضلع $د$ اطول می‌شود از $د$ و اگر زاویه $ا$ را کوچکتر از $د$

فرض کنیم آنوقت لازم می‌آید که ضلع $د$ اقصی باشد از $د$ و چون $د$

مساوی باشد و فرض شده زاویه $ا$ بتواند اعظم باشد از $د$ و نا منقول می‌گردد

است و بهین وجه ثابت میکنیم که زاویه $د = د$ و زاویه $د = د$

مشترک ملاحظه نمایند که هر دو زاویه متساوی مقابل شده اند و ضلع متساوی

مثلاً دو زاویه متساوی $ا$ و $د$ مقابل اند و ضلع متساوی $د$ و $د$

قضیه سیزدهم

در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویه متقابل برابر و ضلع

بنها در $ا$ را از راس $ا$ بر نقطه $د$ از وسط

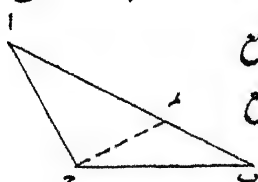
قاعده $د$ و $د$ می‌کنیم آنوقت در دو مثلث $ا د ه$ و $د ه د$ سه ضلع

نظیر نظیر متساوی است و مشترک است و فرض $ا ب = ا ح$ و بهین $د$

متساوی متساوی
نظراً ضلع $ا ب = ا ح$
بنها زاویه $د$ مساوی است
باب

قضیه نهم

از دو ضلع هر مثلث طول آید که مقابل باشد بزاویه اعظم
و بالعکس از دو زاویه مثلث اعظم است که موتر باشد بضلع اطول



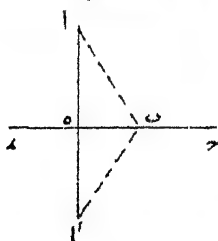
اول فرض میکنیم زاویه $\angle ب$ و $\angle ج$ ضلع
اب مقابل بزاویه $\angle ج$ اطول است بضلع
ا ج مقابل بزاویه $\angle ب$

برهان زاویه $\angle ج$ را مساوی $\angle ب$ جدا کنید آنوقت در مثلث $\angle ب$ و $\angle ج$
ضلع $ب = ج$ و $\angle ب = \angle ج$ و لی ضلع ا ج اقطر است از $ا ب + ب ج$ و این مجموع
مساویست با $ا ب + ب ج = ا ج$ پس اب اطول است از ا ج

ثانیاً فرض میکنیم ضلع اب $\angle ج$ و $\angle ب$ ضلع ا ج
اعظم است از زاویه $\angle ب$ مقابل بضلع ا ج زیرا که اگر فرض کنیم $\angle ب$ پس
بجکم مذکور اب $\angle ج$ و این خلاف فرض است پس لابد زاویه $\angle ج$ باید اعظم باشد از
قضیه ششم

قضیه ششم

از نقطه مفروضه در خارج خطی میتوان یک عمود بر آن خط افود آورد



اولاً نقطه مفروضه است و $\angle ج$ خط مفروض
پس جزء اعلا ی سطح را حول $\angle ج$ حرکت میدهیم تا بر
اسفل منطبق شود و اگر نقطه ا باشد در اینجا و ا را
وصل میکنیم آنوقت اگر جزء اسفل $\angle ج$ را حول $\angle ج$

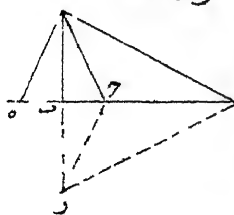
بعکس حرکت دهیم تا نقطه ا بمقام اول خود معاودت کند خط ا ه درست منطبق
شود بر ا ه و زاویه ا ه ج درست میشود زاویه ا ه ج را چون این دو زاویه

۲
فرض کنیم $\angle ج = \angle ب$
پس $ا ب = ا ج$
پس خلاف فرض است

مجاوره اند زاویه $ا ه$ قائمه است پس $ا ه$ عمود باشد بر $ح د$
 ثانیاً فرض میکنیم که از نقطه $ا$ بتوان دو عمود $ا ه$ و $ا ب$ را بر $ح د$ آخر
 نمود پس یکی از آن دو عمود مثلاً $ا ه$ را امتداد میدیم بقدر که $ا ه$ مساوی شود
 با $ا ب$ و خط $ا ب$ را وصل میکنیم آنوقت مثلث $ا ه ب$ مساوی میشود با $ا ب$
 چونکه دو زاویه $ا ه ب$ و $ا ب ه$ قائمه اند و ضلع $ا ه = ا ب$ و ضلع $ب ه$ مشترک
 است پس زاویه $ا ب ه$ مساوی میشود با $ا ه ب$ و چون زاویه $ا ه ب$ قائمه است
 $ه ب ا$ نیز قائمه میشود و در اینصورت چون مجموع دو زاویه مجاوره $ا ب ه$ و $ه ب ا$
 دو قائمه شد باید خط $ا ا$ مستقیم باشد و آنوقت لازم آید که بتوان باین نقطه
 $ا و ا$ را بدو خط مستقیم وصل نمود

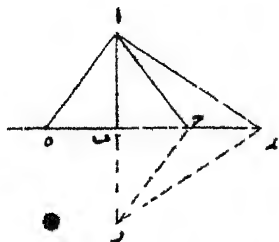
قضیه نهم

چون از نقطه $ا$ واقع در خارج خط $ح د$ عمود $ا ب$ را بر آن خط فردا ویم
 و خطوط مایل $ا ه$ و $ا د$ و غیره را بر نقاط مختلفه آن خط وصل کنیم
 اولاً عمود $ا ب$ اقصر است از هر خط مایلی و ثانیاً هر دو مایل مساوی البعد از
 موقع عمود مثل $ا د$ و $ا ه$ که بدو یکدست مساوی $ب د$ و $ب ه$ در $ح د$
 واقع شده اند مساوی هستند و ثالثاً از هر دو خط مایلی مثل $ا د$ و
 $ا ه$ یا $ا ه$ و $ا د$ آنکه از موقع عمود اجدا باشد اطول است



بر هر $ا$ عمود $ا ب$ را با اندازه خود تا نقطه $د$ امتداد
 میدیم و دو خط $ح د$ و $د ا$ را وصل میکنیم
 آنوقت مثلث $ب د ا$ مساوی شود با $ب د ا$
 چونکه دو زاویه $ح د ا$ و $د ا ب$ قائمه اند و ضلع

و ضلع $د$ مشترکات و ضلع $د = د$ پس $د$ ضلع سیم $د$ و
 مساوی شود با ضلع سیم $ا$ و چون خط سیم $ا$ و $د$ اقصر است از یکدیگر
 $ا$ د پس $ا$ نصف $ا$ و $د$ اقصر شود از
 $ا$ نصف $ا$ و $د$ یعنی عمود اقصر است از



هر خط مایل

ثانیاً چون $د$ را مساوی $د$
 فرض کنیم و $ا$ مشترک است زاویه

$ا ب د = ا د د$ مثلث $ا ب د$ مساوی میشود با مثلث $ا د د$ و
 و ضلع $ا ه$ و $ا د$ مساوی گردند یعنی و مایل مساوی البعد از موقع عمود متساوی باشد
 ثالثاً در مثلث $د د ا$ مجموع دو خط $ا د$ و $د د$ اقصر است از مجموع دو ضلع
 $ا د$ و $د د$ و بنابراین $ا د$ نصف $ا د$ و اقصر شود از $ا د$ نصف $ا د$

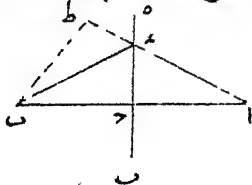
یعنی از دو خط مایل هر کدام ایضا باشد از موقع عمود اطول است

نتیجه ۱ - فاصله یعنی نقطه از خطی بطول عمود مشخص شود چنانکه اقصر است از سایر عمود
 نتیجه ۲ - از نقطه مفروضه میتوان به خط متساوی خطی وصل نمود و الا لازم است

در این سمت عمود و مایل متساوی واقع شود

قضیه هجدهم

چون از نقطه $د$ واقع بر وسط خط $ا ب$ عمود $د$ را بر آن خط اخراج

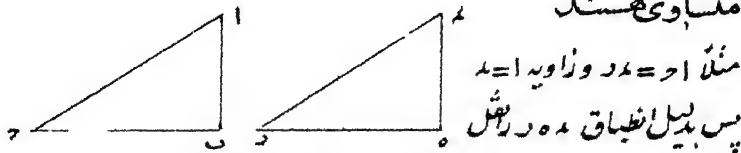


کنیم گوئیم اولاً هر نقطه از این عمود متساوی
 البعد است از طرفین $ا ب$ و ثانیاً هر نقطه
 واقع در خارج عمود غیر متساوی البعد

= ه ر پ ساح = م ر ولی بفرض م ر مساوی است با ا د پ ساح = ا د
و این بتساوی صحیح نباشد چو کم یا ل ا د ابعاد است از م واقع عمود و ا ل پ ساح
اختلاف نداشته باشد با ه ر و مثلث ا ب ح مساوی باشد با ه ر

قضیه بیست و نهم

در دو مثلث قائم الزاویه هرگاه وتر و زاویه متساوی باشند آن مثلث
متساوی هستند

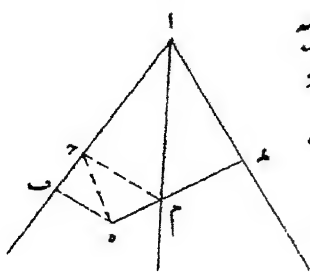


مثلاً ا ح = م ر و زاویه ا د
پس بدلیل تطابق م ر و ر ه ل
میکنیم برای ح برو جیکه م ر واقع شود بر ا د آنوقت زاویه م چون مساویست
با ا ضلع م ر واقع میشود بر استقامت ا ب و در این صورت ر ه واقع خواهد شد
بر استقامت ح د و الا لازم آید که از ح بتوان دو عمود بر ا ب فرود آورد
پس نقطه ه منطبق میشود بر ف و دو مثلث متساوی میگردند

قضیه بیست و یکم

اولاً هر نقطه که مثلث م که فرض شود بر خط متصف الزاویه ف ا د متساوی
البعداست از ضلعین الزاویه و ثانیاً هر نقطه مثله که در خارج
این خط فرض شود غیر متساوی البعد است از همان دو ضلع
برها - اولاً از نقطه م واقع بر متصف الزاویه ف ا د دو عمود م د
و م ح را بر ا د و ا ب فرود آورید تا دو مثلث قائم الزاویه م ا د و م ا ب
متساوی گردند چونکه وتر م ا د هر دو متساوی است و دو زاویه م ا د و م ا ب متساوی
پس م د = م ح

مقالہ اول



ثانیاً از نقطه واقع در خارج منصف الزاویه
دو عمود مساوی بر ا ب و ا ب بر ا و ا بر ا
آورید و از نقطه م آنجا که خط ه د منصف
الزاویه را قطع میکند عمود م را برابر
فرد آورید و ه را وصل کنید آنوقت

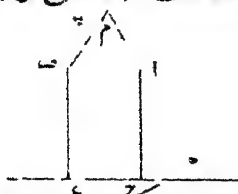
در مثلث د ه م ضلع د ه λ م د ه μ و چون $\mu = \lambda$ پس $\lambda > \mu$

و ف ه ح ه ع ف ه ٤٥

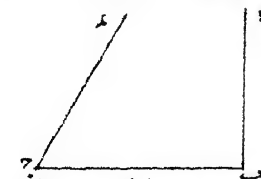
شرح خط منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است که مساوی البعد باشند
از ضلعین آن زاویه

قضیت و زمر

هرگاه دو خط ad و be عمود باشند بر خط alt و h هر دو قائم
 چونکه اگر مستلای میشوند مثلث بر نقطه m آن
 وقت لازم می آید که از آن نقطه دو عمود بر cd
 فرود آمده باشد



حکمر - اگر یکی از دو خط اب و عمود باشند بر حد و
دیگر مایل بر بعد از امتداد متلاقع میشوند
این حکم ظاهر است و محتاج بدلیل نیست



قضیت و سیر

بر نقطہ میثوان خطی بموازات خط دیگر مرسوم داد و بیش از یک موازی ممکن نیست

برنها - از نقطه ا عمود اء را بر عمود
 فرود آورید و از همان نقطه اء را عمود
 بر اء پس دو خط از و عمود متوازی کنید
 و ۲۲ حال میگوئیم که غرض خط از هر خط
 مثل ا ط کبر را مرور کنید مگر موازی باشد با اء چونکه
 عمود است بر اء و ا ط مایل است نسبت بآن

قضیه یست چهارم
 هرگاه دو خط دء و اب متوازی باشند و خط رج عمود بر یکی از
 از آن دو و مثلاً بر اب پس عمود باشد بر خط دیگر دء

برنها اولاً ظاهر است که رج باید تلاقی نماید
 دء را و الا لازم آید که بر نقطه د و دو خط فرو رود
 باشد موازی است دء و بعد از وقوع ملاقات گوئیم
 عمود شود بر دء و الا دء مایل باشد بر رج
 و اب عمود است بر آن و در این صورت مستلزم
 میشوند و این خلاف فرض است

قضیه یست پنجم
 هرگاه دو خط اب و دء متوازی باشند با خط ثالث هء پس متوازی
 هستند نسبت به یکدیگر
 چونکه اگر این دو خط اب و دء متلاقی
 کردند بر نقطه مثل م آنوقت لازم آید که

مُقَالَفَتُكَ

که از این نقطه بتوان دو خط بموازات e و r رسم نمود

حلول

ہم گاہ دو خطاں و حمد را خطا ثالثہ

قطع کنه هشت زاویه حول دو نقطه فصل مشترک

ط و ح احداث شود

چار زاویه ۱ و ۴ و ۵ و ۸ واقع ہا ہیں

وخطاب و حمد را از ویای داخله کو شتم و

چار زاویه دیگر خارجہ

و در زاویه داخله او ۵ را که طرفین قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متبادله

داخل کوئٹہ و دوزاویہ داخل و خارجہ ۱ و ۲ کہ دریکسیت قاطع واقع شدہ

و غیر مجاوره اند متقابلہ کویم

و در زاویه خارجی غیر محصوره α و β را که در طرفین قاطع واقع شده اند بمقادیر خارجی

قصہ کی ابتدا

چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند گوئیم اولاد و زاویه متبادله جدا

متساوی باشند و قایماد و زاویه متبادله خارج متساوی باشند و ثالثاً

دور و زوایه خارجه و داخله متقابلہ متساوی

ماستد و راساً دو زاویه داخلی واقع در

بسم الله قاطع مجوعشان ماوی باشندادو

میرزا

برهان دوتواری اب اسطیج ۷۷۷

قائم طے یں از نقطہ وسط سے عمودہ نام را برابر فروچی اور ہم ان خط عمودہ

م - بر هم دو مثلث قائم الزاویه م و ه ن ع متساوی می‌شوند چونکه
بفرض دو وتر ه و و ع متساوی هستند و دو زاویه م و ه ن ع
نیز متساوی و از تساوی این دو مثلث دو زاویه متبادله داخل م و ه ن ع
متساوی شوند

و نیز بهمان واسطه دو زاویه ب و د و ه ک تمام دو زاویه م و ه ن ع متساوی
ثانیاً دو زاویه متبادله خارجیه طرف و ح ع متساوی هستند چونکه متقابلند
با دو زاویه متبادله داخل م و ه ن ع

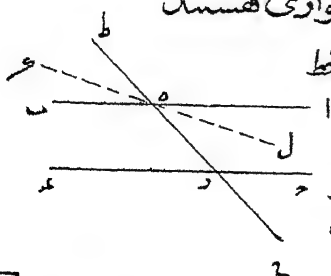
ثالثاً دو زاویه متقابلیه طرف و د ع متساوی هستند چونکه طرف =
ا ب و ا د = ط ع

رابعاً مجموع دو زاویه ب و د و د ع متساوی است با دو قائمه چونکه
ب د + ا ب = ا د = ط ع

قضیه بیست و هفتم

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بر وجهی که دو زاویه متبادله داخله
شوند یا دو زاویه متبادله خارجیه یا دو زاویه خارجیه و داخله متقابل
و یا مجموع دو زاویه داخله یا دو زاویه در یک سمت قاطع متساوی شود یا با
قائم در این چهار صورت اند و خط متوازی هستند

و دو خط مغایر از این است و هم دو خط
قاطع ط ع
برهان گوئیم اگر دو زاویه متبادله داخله ا ه د
و ه د متساوی باشند از موازی است



مقاله اول

۳۰

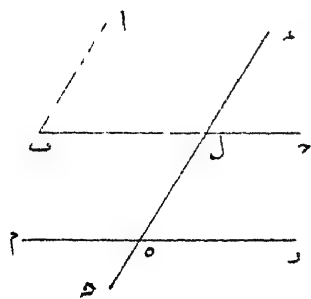
با α و β بر نقطه α خط $\alpha\beta$ را بموازات $\alpha\gamma$ رسم میکنیم نوقت دوزاویه
 α و β و γ چون متبادله داخلند متساوی باشند و بنا بر فرض α
 مساوی بود با β پس α و β مساوی میشود با α و این محال است
 ثانیاً اگر دوزاویه متبادله خارج ط α و β و γ متساوی باشند و
 زاویه α و β و γ مقابل برش با آن دوزاویه متساوی میشوند و نوقت
 بنا بر حکم اول $\alpha\beta$ موازی میشود با $\alpha\gamma$

ثالثاً اگر دوزاویه خارج و داخله متقابل ط α و β و γ متساوی باشند
 و چون ط α مساویت با α و β پس α و β مساوی شود با α و β و حکم اول
 $\alpha\beta$ موازی شود با $\alpha\gamma$

وابعاً اگر مجموع دوزاویه α و β و γ مساوی باشد و قائمه و چون
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ پس $\alpha = \beta = \gamma$ و $\alpha\beta$ موازی شود با $\alpha\gamma$

قضیه بیست و هشتم

هرگاه اضلاع دوزاویه متوازی باشند پس آن دوزاویه متساوی
 هستند یا تمام هم بیکر اند ثانیاً و قائمه



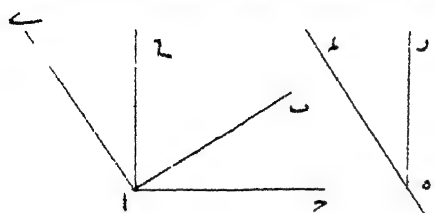
دوزاویه مفروضه $\alpha\beta\gamma$ است و α و β
 که اضلاع آن متوازی هستند و متساوی
 پس کوئیم این دوزاویه متساوی هستند زیرا
 که دوزاویه α و β و γ چون متقابلند
 متساوی باشند و همچنین $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

پس $\alpha = \beta = \gamma$

ثانیاً دو زاویه فروضه احد است و مدومه که اضلاعشان متوازی باشند ولی دو ضلع با او مدوم در یکجهت متداند و دو ضلع با او مدوم در وجه مخالف گوئیم تمام هدی یکراندند و قائم زیرا که مدومه تمام مدوم است و مدوم مساوی است

قضیه بیست و نهم

هرگاه اضلاع دو زاویه عمود باشند بر هدی یکراندند و زاویه متساوی هستند یا تمام هدی یکر



دو زاویه که اضلاعشان عمود باشند بر هدی یکر احد است

و مدوم پس از نقطه انحطاط

عمود میکنیم بر اب و خط ا ح را بر اد آن وقت این دو خط متوازی میشوند با

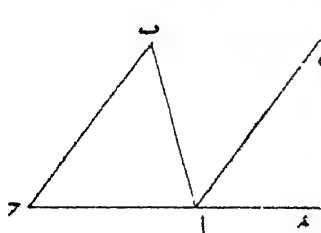
مدوم و مدوم و همه متداند در یکجهت پس زاویه $\angle ۱ = \angle ۲$ و ولی $\angle ۱ + \angle ۲ = ۱۸۰$

$$\angle ۱ + \angle ۲ + \angle ۳ = ۱۸۰ \text{ پس } \angle ۳ = ۱۸۰ - \angle ۱ - \angle ۲ = ۰$$

مشکل - هرگاه بجای مدوم زاویه ده ط را اختیار کنیم که حادث شده است باین ده و استقامت ده ظاهر است که این زاویه تمام با احد است تا دقت

قضیه بیست و دهم

مجموع زوایای هر مثلث مساویست بدو قائمه



نیز که او را بموازات با رسم

کنند و او را امتداد دهند تا وقت

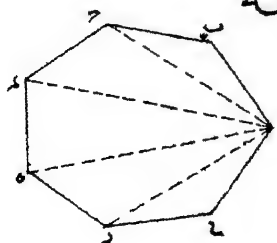
دو زاویه احد و ده چون نسبت

بدو متوازی با او و بخلاف قاطع

۱- مقابلہ اند مساوی باشند و زاویہ α و β چون متبادله اند
نسبت بهمان دو متوازی و بقاطع α متساوی هستند پس مجموع زوایای مثلث مساوی
شد مجموع سه زاویہ α و β و γ و γ عاده حول نقطه α و در یک سمت γ
و جمع ثانی مساویست با دو قائمہ پس جمع اول نیز دو قائمہ است
نتیجہ ۱- در ہر مثلث ممکن نیست پیش از یک زاویہ قائمہ موجود شود و بدین ترتیب
از یک زاویہ منفرد

۲- در مثلث قائم الزاویہ مجموع دو زاویہ عاده مساویست بیک قائمہ
۳- در مثلث ہر کجہ مجموع دو زاویہ معلوم باشند از دو قائمہ غیر کنیم باقی زاویہ معلوم است
۴- در مثلث α β γ زاویہ خارجہ β α عاده γ ماہر ضلع β α و مستقام
۱- مساویست بمجموع دو زاویہ داخلہ β α و γ
قضیہ سہمی و یکم

مجموع زوایای داخلہ ہر کثیر الاضلاع محدب مساویست بعد
اضلاعش منتہای دو ضرب بدو قائمہ



بنی ہا بر یک زاویہ مثلث برابر اقطاری کنندیم
کہ منتہی شوند بجمع رؤس غیر مجاورہ تا کثیر الاضلاع
بمثلثات قسمت شود و عدد این مثلثات بڑا
است با عدد اضلاع منہای دو زیرا کہ چون

نقطہ h را اس مشرک بجمع قرار دہیم تا عدد ہر کدم ضلعی میشود از کثیر الاضلاع غیر از
و در مثلث طریف کہ ہر کدام صاحب دو ضلع میشوند و مجموع زوایای این مثلثات
مساویست بمجموع زوایای کثیر الاضلاع و این حاصل جمع بعد و مثلثات مرکب از

دو قائمه است یعنی دو واحد کمتر از عدد اضلاع شامل دو قائمه است پس اگر عدد اضلاع را ۴ فرض کنیم مجموع زوایای کثیر الاضلاع بحسب قائمه چنان میشود

$$۴ - ۲ = ۲ \text{ یا } ۲ \times (۴ - ۲)$$

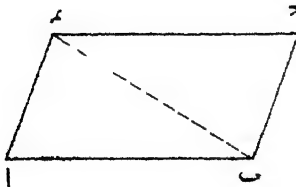
قضیه سی و دوم

چون جمیع اضلاع کثیر الاضلاع محدب و ابیل جهت امتداد دهیم مجموع زوایای خارجی که حادث شود مساویت با چهار قائمه

بوهنا هر زاویه داخله با ضافه خارجی مجاوره
مساویت با دو قائمه پس مجموع زوایای داخله
و خارجی کثیر الاضلاع مساویت با ۲ قائمه
(۴ عدد اضلاع است) و چون مجموع زوایای
داخله مساوی شد با (۲ - ۴) قائمه پس مجموع زوایای خارجی بقدر نقصان جمع است
برشانی یعنی ۴ قائمه

قضیه سی و سیم

در شکل متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل متساوی باشند و همچنین
هر دو زاویه مقابله



بوهنا - قطرب را وصل کنید
آنوقت در دو مثلث ا ب د و ا ب د
ضلع ب د مشترک است و نسبت ب د و خط
متوازی ا د و ب در زاویه ا ب د =

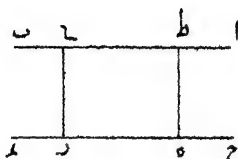
ب د و ع و نسبت ب د و خط متوازی ا ب و د در زاویه ا ب د = ب د

مقاله اول

۳۴

پس و این دو مثلث مساوی باشد و ضلع $ا ب$ مقابل زاویه $ا$ مساوی شود و ضلع $ب د$ مقابل زاویه $ب$ و همچنین ضلع $ب د$ مساوی شود و ضلع $د ا$ یعنی که هر دو ضلع مقابل مساوی شدند ثانیاً از تساوی این دو مثلث زاویه $ا$ مساوی شود و زاویه $ب$ و زاویه $ا$ در هر دو زاویه $ا$ و $ب$ $=$ زاویه $ا$ در هر دو زاویه $ب$ و $ا$ یعنی که دو زاویه مقابل مساوی باشند

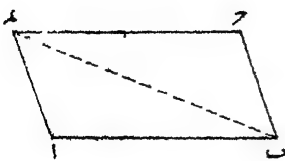
نتیجه ۱- هر دو خط متوازی مثل $ا ب$ و $د ا$ که واقع باشند مابین دو مستوی دیگر $ا د$ و $ب د$ مساوی باشد



نتیجه ۲- فاصله دو خط متوازی هر جا یکی است زیرا که چون از دو نقطه $ط$ و $ق$ از موازی $ا ب$ دو عمود $ط د$ و $ق د$ را اخراج کنیم این دو موازی شوند و $ط د$ و $ق د$ چون واقع شده اند مابین دو موازی

قضیه سی و چهارم

هرگاه در ذرا ربع اضلاع $ا ب$ و $ب د$ هر دو ضلع مقابل مساوی باشد $ا ب = د ا$ و $ب د = د ا$ کریم اضلاع متساوی نیز متوازی هستند و شکل متوازی الاضلاع است



بنها قطر $د ا$ را وصل میکنیم و دو مثلث $ا ب د$ و $ب د ا$ چون اضلاعشان نظیر نظیر مساویست متساوی باشند و زاویه $ا$

مقابل ضلع $ا ب$ مساویست با زاویه $ب$ و مقابل ضلع $ب د$ پس ۲۷

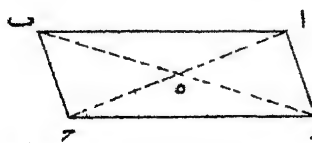
ضلع ad موازیت با b و ac موازیت با d پس شکل ad متوازی الاضلاع است
قضیه سی و پنجم

هرگاه در ذواربعضی (شکل سابق) دو ضلع مقابل ab و cd متساوی و متوازی باشند پس دو ضلع دیگر نیز متساوی و متوازی و شکل ad متوازی الاضلاع است

برهان قطرها وصل کنید آنوقت چون ab موازی است با d و ac متبادله داخله a و b متساوی است و c و d نیز $a = c$ و $b = d$ ضلع ad مشترک پس مثلث ad مساویت با c و d پس ضلع $ad = c$ و زاویه $ad = b$ و بنا بر این ad موازیت با b و شکل ad متوازی الاضلاع است

قضیه سی و ششم

دو قطرها ac و bd از متوازی الاضلاع ad منصف هم دیگر اند بر نقطه تقاطع e



برهان در مقابل دو مثلث ade و cbe ضلع

$ae = ce$ و زاویه $ade = cbe$ و 2 و زاویه $a = c$ و $b = d$ پس این دو مثلث متساوی باشند و ضلع ae مقابل زاویه $a = c$ و be مقابل زاویه $b = d$

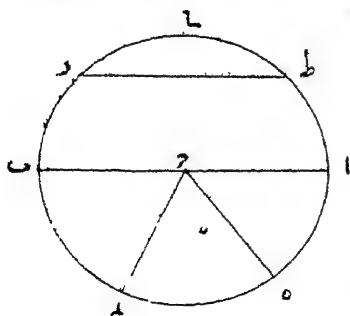
شکل - در شکل معین دو ضلع ab و c متساوی باشند و دو مثلث ade و cbe چون اسامعشان نظیر بنظر متساوی باشند متساویند و بنا بر این زاویه a و

یعنی که در معین و قطر بر و ایای قائمه متقاطع شوند

مقاله بیست و

جدول

۱- محیط دایره خطی است منحنی که جمع نقاطش یک فاصله باشند از نقطه داخل که موسوم است بمركز و سطح دایره و معنی است محدود و محصور بانحنای منحنی و کلمه دایره را هم بر محیط اطلاق کنیم و هم بر سطح ولی از سیاق کلام مقصود معلوم شود و در معنی اختلاف کلی است



۲- هر کدام از خطوط $ا د و د و ه و ه ا$ و غیره و همدیگر را مرکز و نقطه از محیط را نصف قطر و شعاع گوئیم و خط $ا ب$ را که بمركز گذشته و از طریق محیط منتهی شده قطر گوئیم

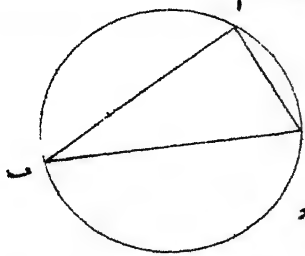
و بنا بر تعریف دایره جمیع اشعه متساوی باشند و همچنین جمیع اقطار و هر قطر مضاعف شعاعی باشد

۳- بخش دایره قطعه است از محیط مثل $د ط$ و وتر خطی است مثل $د ا$ و هبل باین طرفین قوس

عم قطعه دایره جزئی است از بخش محصور باین قوس و وتر و وتر $د ط$ چهاره

مقابل است بر دو قوس $ط و ر$ و بنا بر این بر دو قطعه $دلی$ معصوم و قطعه $کچکر$ مکرر که قید شود

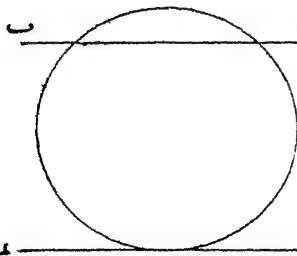
۵- قطاع دایره جزئی است از آنجهو را بین قوس $د$ و $د$ و نصف قطر $د و د$ و $د$ - خط محیط در دایره آنستکه طرفینش



مستقیم باشد محیط مثل خط $ا ب$
زاویه محاطیه آنستکه رأسش واقع باشد
بر محیط و حادث باشد مابین دو وتر مثل زاویه $د$ یا $د$
مثلت محاطی آنستکه رؤسش واقع باشند

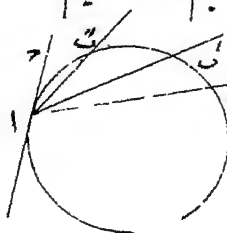
بر محیط مثل مثلث $ب ا د$ و بطور کلی شکل محاطی آنست که رؤس جمیع زوایش واقع
باشد بر محیط و در اینصورت دایره را نسبت بآن محیطی گوئیم

۶- قاطع خطی است که محیط را بر دو نقطه قطع
کند مثل خط $ا ب$



۸- خط مماس آنست که با دایره در یک
نقطه مشترک باشند نه پیش مثل خط $د$
و نقطه متر که $م$ را نقطه تماس گوئیم

۹ و همچنین دو دایره را نسبت بهم مماس گوئیم هرگاه مشترک باشند در یک نقطه بیشتن
شرح - بطور کلی مماس



منحنی حد اوضاع قاطع است
بنا بر آنکه حول نقطه منحنی انقدر
دور آن کند که نقطه مقطع دیگر

مقاله دهم

۳۸

باید بر نقطه اول منطبق شود پس اگر منحنی مسدود باشد و قاطع پیش از دو نقطه با او ملاقات نکند مثل دایره ظاهر است که چون آن دو نقطه فصل مشترک در یک نقطه جمع شوند آن خط قاطع با منحنی در نقطه مشترک نباشند و آنوقت میتوان گفت که مماس خطی است که بر بیشتر از یک نقطه با منحنی مشترک نباشد ولی تعریف اول بر مجموع انواع خطوط منطبق بود
 ۱۰- کثیر الاضلاع را محیط بر دایره گوئیم هرگاه جمیع اضلاعش دایره را مماس کنند و در چنین حالت دایره را نسبت به آن محیطه گوئیم

قضیه اول

در دایره هر قطر مثل ab سطح و محیطش را نصف کند

برهان - چون لایسل انطباق بر قاعده مشترک

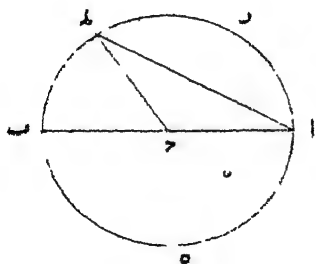
ab شکل aef را قرار دهیم برابر

خط منحنی aef درست منطبق خواهد شد بر

ab و الا لازم آید که بعضی نقاط محیط

مختلفه نباشند از مرکز و این خلاف

تعریف دایره است



قضیه دوم

در دایره هر وتر اقصر است از قطر

برهان چون در شکل سابق دو شعاع oa و ob را بر طرفین وتر ab وصل کنیم خط aob

$\angle aob$ یعنی $\angle aob$

فیلتر - طول خطی که میتوان در دایره می ط نمود قطر است

مقاله دوم

۴۰

۱- در برابر مساوی خود و با ط قوا و سیم نظر بناوی دوزاویه مذکوره شعاع α و β شود بر α و نقطه β بر α پس قوس $\alpha\beta$ مساوی شود با α و β

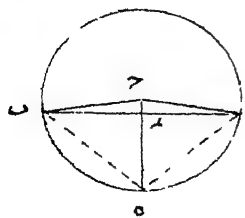
قضیه پنجم

در یکدایره یا دو دایره متساویه هر قوس که اعظم باشد مؤثر است بر طول و بالعکس و ترا طول مقابل باشد بقوس اعظم مشروط بر آنکه قوسهای مفروض کوچکتر باشند از نصف محیط

برهان در شکل سابق قوس α بزرگتر است از β و قوس $\alpha\beta$ مساوی α و β را وصل میکنیم دو ضلع $\alpha\beta$ و $\beta\alpha$ از مثلث $\alpha\beta\gamma$ مساویست با دو ضلع $\alpha\beta$ و $\beta\alpha$ از مثلث $\alpha\beta\gamma$ زاویه α اعظم است از β پس ضلع $\gamma\alpha$ اطول باشد از ضلع $\gamma\beta$ یعنی $\alpha > \beta$ و بالعکس اگر وتر $\alpha\beta$ اطول باشد از $\beta\alpha$ قوس α بزرگتر از β زیرا که اگر کوچکتر مساوی باشد آنوقت وتر $\alpha\beta$ مساوی میشود با $\beta\alpha$ و این خلاف فرض است و اگر کوچکتر مساوی باشد و تر $\alpha\beta$ کوچکتر میشود شرح - قتی مفروضه را کوچکتر از نصف محیط گرفتیم پس اگر اعظم باشد حکم بر خلاف مذکور است

قضیه ششم

نصف قطره عمود بر وتر $\alpha\beta$ منصف آن وتر است و قوس مؤثر α و β هر دو

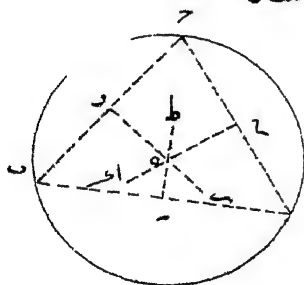


برهان دو شعاع $\alpha\beta$ را وصل میکنیم و هر دو نسبت به عمود γ دو مایل متساویند پس $\alpha\beta$ مساوی البعد اند از موقع عمود یعنی $\alpha = \beta$

ثانیاً چون $ا = د$ و $د$ عمودیت دارد بر وسط $ا ب$ پس $و$ را اول نقطه
از این عمود متساوی البعد است از طرفین $ا$ و $ب$ و نقطه $ه$ یکی از این نقاط است پس
فاصله $ا ه = ب ه$ و چون وتر $ا ب$ مساوی شد با $ب$ قوس $ا ب$ مساوی میشود
با $ب$ و $ع$ پس شعاع $ح ه$ عمود بر وتر $ا ب$ نصف میکند قوس $ا ب$ و وتر را بر نقطه $ه$
شماره - خط $ح ه$ مرور کرده است بر مرکز و بر وسط وتر و بر وسط قوس و عمود است
وتر و چون در تعیین وضع خط $د$ و شرط از این شروط چهارگانه کافیت پس هر خط که
دارای دو شرط باشد دو شرط دیگر را بالنتیج و راست
مثلاً عمودی که استخراج شود بر وسط وتر مرور میکند بر مرکز و بر وسط قوس و همچنین

قضیه هفتم

بر سه نقطه $ا$ و $ب$ و $ج$ غیر واقع بر یک استقامت همواره میتوان
مرور داد و پیش از یک دایره ممکن نباشد



بر هفت نقطه $ا$ و $ب$ و $ج$ را وصل کنید
و بر وسط آنها دو عمود $ا د$ و $ب د$ را بکشید
کنید و اول گوئیم این دو خط بر نقطه متلاقئ میشوند
زیرا که اگر متوازی نبودند دو خط $ا$ و $ب$
که از نقطه $ب$ عمود شده اند بر آن دو خط متوازی

جایست بر یک استقامت باشند و این خلاف فرض است

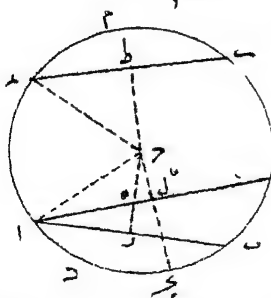
پس نقطه متلاقئ $ه$ از آن دو عمود چون متعلق است به عمود $ا د$ متساوی البعد
از دو نقطه $ا$ و $ب$ و همان نقطه چون متعلق است به عمود $ب د$ متساوی البعد باشد
از دو نقطه $ب$ و $ج$ پس سه فاصله $ا ه$ و $ب ه$ و $ج ه$ متساوی هستند و بنابراین

دایره که از مرکز و نصف قطره رسم شود و در خواهد بود بر هر سه نقطه او و در حال کوئیم ممکن نیست دایره دیگر بر همان سه نقطه گذر کند زیرا که اگر چنین دایره موجود بود مرکزش میبایست واقع باشد بر دو خط $ط$ و $و$ و این دو خط بر یک نقطه متقاطع نباشند

میتواند ۱- عمود وار و بر وسط $ا$ و $و$ نماید بر نقطه $ه$ چونکه این نقطه متساوی البعد از طرفین $ا$ و $و$ است عمود وار و در اواسط اضلاع مثلث بر نقطه متقاطع شوند
۲- دو دایره اگر بر زیاده از دو نقطه مشارک باشند منطبق خواهند شد

قضیه هشتم

دو وتر متساوی الطول متساوی البعد باشند از مرکز دایره و از دو وتر مختلف آنکه اقصر باشد بعدش از مرکز بیشتر است



اول فرض میکنیم وتر $ا ب = د و$ و بر عمود

در و $ط$ آنها را نصف میکنیم و دو شعاع

ح $ا و د$ را وصل میکنیم

پس دو مثلث قائم الزاویه $ح ا و د$ را

چون $ح ا = د و$ ضلع از ضلع $ا ب$

$= د و$ نصف $ا ب$ این دو مثلث متساوی هستند و $ا و د$ ضلع سیم در مساوی

میشود با $ح ط$ پس معلوم شد که دو وتر متساوی $ا ب$ و $د و$ متساوی البعد از مرکز

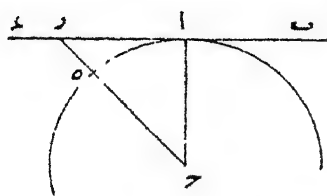
ثانیاً چون تراجم اطول است از $د و$ قوس $ا ب$ اعظم است از قوس $د و$

و از قوس $ا ب$ قوس $ا ب$ را مساوی $د و$ جدا میکنیم و وتر $ا ب$ را

وصل میکنیم و عمود $د و$ را بر آنوتر فرود بیاوریم و عمود $ح ط$ را بر $ا ب$ حال

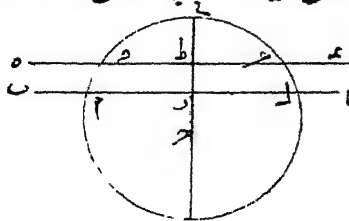
ظاهر است که دو اعظم باشد از ده و آن اعظم از دل پس بطریق اولی در دل
ولی در دوط چونکه دو وتر اب و ب و مساوی باشند پس دط دل
یعنی که از دو وتر مختلف الطول آنکه اقصر است بعد باشد از مرکز دایره
قضیه پنجم

عمود ب و مرسوم بر طرف شعاع د ا مماس شود بر دایره
برها هر مائی مثل د و اطول است از عمود د ا
پس نقطه و خارج دایره افتد و از این قرار خط
ب و بیش از نقطه ا با دایره اشتراک ندارد
پس مماس دایره است و بالعکس کو نیم
شعاع د ا وصل بر نقطه مماس عمود باشد بر خط مماس ب و



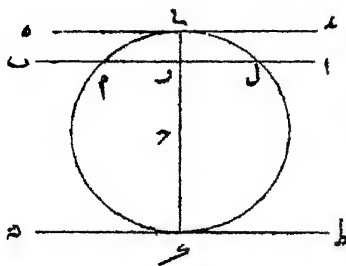
زیرا که جمیع نقاط این خط غیر از نقطه ا خارج دایره است و بنا بر این شعاع د ا اقصر است
که میتوان از نقطه د بر خط ب و وصل نمود پس عمود است بر آن خط
نتیجه - بر نقطه ا مفروضه محیط نمیتوان پیش از یک خط مماس نمود
قضیه ششم

دو متوازی اب و ب و از محیط دایره دو قوس متساوی من و ن و ل جدا
از شکل سه حالت دارد اول آنکه دو متوازی قاطع دایره باشند پس شعاع د و را
عمود کنیم بر وتر م ل و آن عمود شود نیز بر
موازی ن که پس نقطه م بهم بر وسط قوس
م ل واقع باشد و بهم بر وسط قوس ن
م ل و یعنی م ل = ن ل و وتر



ن = ل ک پس م - ل = ن ل - ل = ک یعنی م ن = ل ک

دوم آنکه از دو متوازی اب و ده یکی
قاطع باشد و دیگر مماس شعاع \angle را
بر نقطه تماس \angle وصل میکنیم و آن عمود
بر مماس ده و \angle نیز بر موازیش م ل
پس نقطه \angle واقع باشد بر وسط قوس م

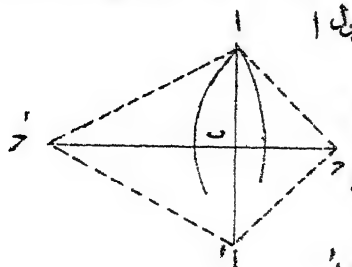


ل یعنی دو قوس م و ل واقع مابین دو متوازی مساوی باشند

سیم آنکه دو متوازی مماس دایره باشند یکی ده بر نقطه \angle و دیگری ط ن بر نقطه
ک پس خط قاطعی موازی آنها رسم کنیم مثل اب آنوقت بنا بر آنچه ذکر شده م ل
= ل و م ل = ل پس تمام قوس م ک = ل ک و باید ملطف بود که
هر کدام نصف محیط است

قضیه نایزدهم

هرگاه دو دایره مشارک باشند در نقطه ا واقع در خارج خط
واصل مابین مرکبین آنها پس مشارک میشوند در نقطه دیگر
ا واقع بر عمود اب که وارد شده باشد بر د و واصله این نقطه دوم
از خط المركبین برابر باشد با فاصله نقطه اول



برشما - اب را مساوی اب جدا میکنیم
پس دو میل د ا و ا چون مساوی البعد
از موقع عمود د ب مساوی باشند پس
مرومه از مرکز د و شعاع د ا مرور کنند نقطه ا

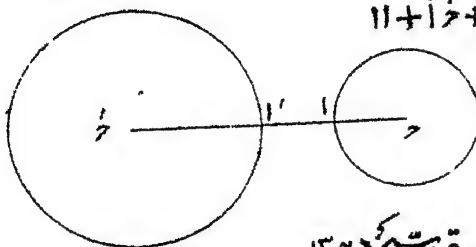
و همچنین دایره مرسومه از مرکز α و شعاع α مرور کند بر α
 نتیجتاً ۱- دو دایره چون متقاطع شوند خط وصل بین المکزین α و β باشد بر وسط و
 نتیجتاً ۲- دو دایره چون تماس یکدیگر شوند نقطه تماس واقع شود بر خط المکزین و الا نه
 آید که دو دایره در نقطه دیگر مشارک باشند و در این صورت متقاطع میشوند نه تماس
 دو دایره را چون نسبت هم دیگر بنحیم صاحب پنج وضع مختلف توانست بود متخرج
 متداخل تماس و جمل تماس خارج متقاطع

قضیه دوازدهم

دو دایره متخارج بعد المکزین اعظم است از مجموع دو شعاع

زیر که چون $\alpha + \alpha' + 1 = \alpha + \alpha' + 1$

پس $\alpha + \alpha' > 1$

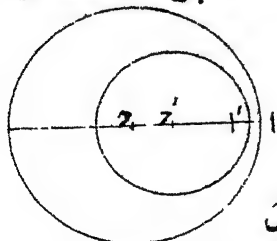


قضیه سیزدهم

دو دایره متداخل بعد المکزین اصغر است از مجموع دو شعاع

زیر که چون $\alpha + \alpha' - 1 = \alpha + \alpha' - 1$

$\alpha + \alpha' > 1$



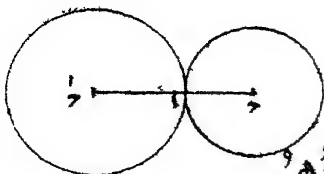
قضیه چهاردهم

دو دایره که تماس خارج باشند بر هم دیگر بعد المکزین مساوی است
 مجموع دو شعاع

زیر که چون نقطه تماس واقع است

بر خط المکررین

$$\text{پس } ۱ + ۱ = ۲$$



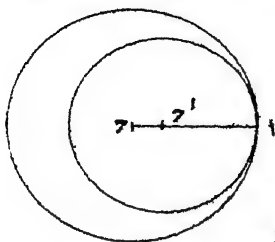
قضیه شانزدهم

دو دایره که همداس داخل باشند بر همدیگر بعد المکررین مساویت بقا

دو شعاع

زیر که چون نقطه تماس واقع است بر خط المکررین

$$\text{پس } ۱ - ۱ = ۰$$



قضیه شانزدهم

دو دایره متقاطعه بعد المکررین یا صغراست ان مجموع دو شعاع و اعظم

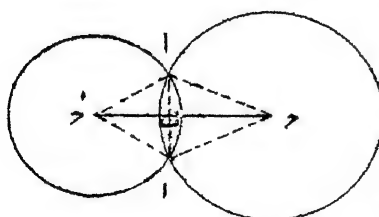
از تفاضل آنها

بنها دو مرکز را وصل میکنیم

فصل مشترک آنها مثلثی ترکیب شود

که اضلاعش یکی خط المکررین و دیگری

و دیگر دو شعاع و او را



بهرین شده که در مثلث بر ضلع اقصراست ان مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها

عکس پنج شکل مذکور نیز صحیح است و بهمانوجه بهرین شود مثلاً اگر بعد المکررین

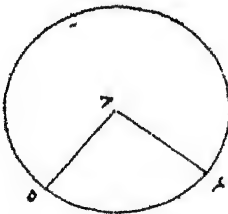
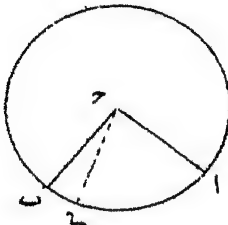
باشد ان مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها و دایره متقاطع شوند زیرا که اگر

متخارج یا متداخل بود بعد المکررین اعظم میشد ان مجموع آنها یا اصغر از تفاضل آنها

و اگر همس می گیریم و بعد از مرکزین مساوی میشد بجای دو شعاع یا بتفاضل آنها

قضیه هفتم

در یک دایره یا دایره دو زاویه متساویه هرگاه دو زاویه مرکزیه $ا د ب$ و $د ح ه$ متساوی باشند دو قوس $ا ب$ و $د ه$ مقابل با آنها متساوی هستند و بالعکس اگر دو قوس $ا ب$ و $د ه$ متساوی باشند دو زاویه مرکزیه $ا د ب$ و $د ح ه$ مساوی میشوند



پیشترها اولاً اگر دو زاویه مساوی باشند یکی را بزرگتر از دیگری درست منطبق شوند و چون اضلاعشان مساویت نقطه واقع شود بر $د$ و نقطه $ب$ بر $ه$ و آنوقت قوس $ا ب$ باید واقع شود بر $د ه$ و الا نقایص پیدا میشد مختلفه از مرکز پس $ا ب = د ه$

ثانیاً اگر قوس $ا ب$ مساوی باشد با $د ه$

دو زاویه مقابل مساوی میشوند زیرا که اگر چنین نباشد مثلاً $ا د ب$ اعظم باشد از $د ح ه$ $ا ب$ را مساوی $د ه$ جدا میکنیم آنوقت قوس $ا ب = د ه$ و بقیه $ا ب = د ه$ یعنی جزء مساویت با کل و این خلاف است پس $ا د ب = د ح ه$

قضیه هجدهم

در یک دایره یا دایره دو زاویه متساویه نسبت ما بین دو زاویه مرکزیه مثل نسبت دو قوس واقع ما بین اضلاع آنها است دو زاویه مرکزیه و دایره مساویه $ا د ب$ است و $د ح ه$ و اول فرض میکنیم که دو

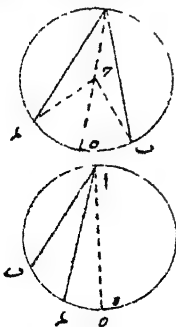
تقدیر نمودن بر شیئی عبارت از اینست که معلوم کنیم نسبت اشئی را با واحد نوع خود
و از بهترین قدر تقدیر نمودن زاویه عبارت است از اینکه بسنجیم آن زاویه قائمه که حدود
فرض شده و نسبتش را معلوم کنیم

و بنا بر شکل مذکور عوض آنکه نسبت باین دو زاویه مرکزیه بیت آوریم مستویان
معلوم کرد نسبت دو قوس واقع باین اضلاع آنها را مثلاً عوض آنکه زاویه را بقوس
بسیجیم قوس مقابلش را بر ربع محیط نسبت کنیم و از اینجا است که بطریق اختصار گوئیم که
اندازه و مقیاس زاویه مرکزیه قوس مقابل آنست

و من باب تسهیل مقایسه محیط دایره را بر ۳۶۰ جز و مساوی قسمت کنیم و هر
کدام را درجه گوئیم و درجه را بر ۶۰ دقیقه و آنرا بر ۶۰ ثانیه و هكذا
پس اگر قوس واقع باین ضلعین زاویه مرکزیه ۲۴ درجه باشد مقیاس زاویه چنان
است $\frac{۲۴}{۹۰}$ یا $\frac{۲۴}{۱۵}$

شرح - چون دایره مذکور را در قطاع تکرار کنیم ثابت میشود که در دو دایره متساوی
نسبت دو قطاع به یکدیگر مثل نسبت باین دو قوس مقابل با آنهاست
قضیه نهم

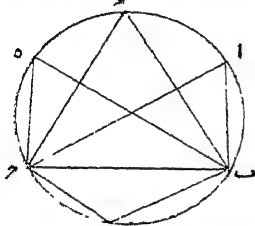
مقیاس زاویه محیطیه با نصف قوس به واقع باین ضلعین است



نوهتا اول فرض میکنیم که مرکز دایره در زاویه
مفروضه واقع شود و قطره را وصل میکنیم با دو
د و د آنوقت زاویه د د د خارج
مثلث د د مساوی شود با مجموع دو زاویه د د
د د و د د اول و مثلث د د د مساوی

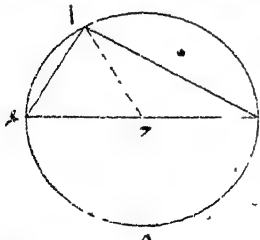
التساوی است و زاویه $\angle ا ب د = ا ب د$ پس زاویه $\angle د$ مضاعف زاویه $\angle ا$ باشد و مقیاس زاویه مرکزی $\angle د$ قوس $\widehat{ب د}$ باشد پس مقیاس زاویه $\angle ا$ نصف قوس $\widehat{ب د}$ باشد و بهمان دلیل مقیاس $\angle ا$ نصف قوس $\widehat{ب د}$ باشد پس مقیاس $\angle ا + د = ا د =$ نصف $\widehat{ب د} +$ نصف $\widehat{ب د} =$ نصف $\widehat{ب د}$

دویم فرض میکنیم که مرکز $د$ واقع شود در خارج زاویه $\angle ا$ و قطر $ا ه$ را وصل میکنیم پس مقیاس زاویه $\angle ا$ نصف قوس $\widehat{ب د}$ باشد و مقیاس زاویه $\angle د$ نصف $\widehat{ب د}$ پس مقیاس $\angle ا + د$ نصف $\widehat{ب د}$ باشد یعنی نصف $\widehat{ب د}$



پس مقیاس هر زاویه محیطیه نصف قوس مقابل او است
نتیجتاً جمع زوایای $\angle ا$ و $\angle د$ و غیره
محاطیه در یک قطعه دایره متساوی باشند چنانکه
مقیاس هر کدام نصف قوس $\angle ا$ است

نتیجتاً زاویه $\angle ا$ محاطیه در نصف دایره قائمه است چنانکه مقیاسش نصف نیم



دایره $\angle د$ است یعنی ربع محیط و چون این
نقطه معتبر است بوجهی مستقل آنرا مبرهن سازیم
پس شعاع $ا د$ را وصل کنیم آنوقت مثلث
 $\angle ا$ و $\angle د$ متساوی الساقین باشد و زاویه $\angle ا$

$\angle ا = ا د$ و بهکذا مثلث $\angle ا$ و زاویه $\angle ا = ا د$ پس $\angle ا + د = ا د$ یعنی

$\angle ا = ا د + ا د$ و چون مجموع دو زاویه $\angle ا$ و $\angle د$ مثلث $\angle ا$ مساوی

شد باز زاویه $\angle ا$ دلیل است بر آنکه مجموع سه زاویه $\angle ا$ مساوی باشد با $د$

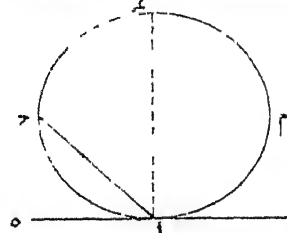
برابر زاویه $\angle ا$ و از خارج میدانیم که آن مجموع $د$ و قائمه است پس زاویه $\angle ا$

ایک قائمہ است

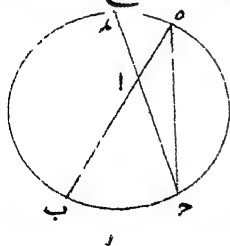
فیجدا ۳- ہر زاویہ مثلث Δ (شکل فچید اول) کہ محاطا باشد در قطعہ بزرگتر از نصف محیط Δ و Δ است زیرا کہ مقیاسش نصف قوس Δ و Δ باشد و این قوس اصغر از نصف محیط Δ و ہر زاویہ مثلث Δ کہ محاطا باشد در قطعہ کوچکتر از نصف محیط منفرجہ است چونکہ مقیاسش نصف قوس Δ و Δ باشد و این قوس اعظم است از نصف محیط

قضیہ ثانیہ

مقیاس زاویه و حادثه مابین ظل و وترصف قوس امر واقع
مابین دو ضلع اثر و یک است



وہیں جب ثابت کیں گے کہ مقیاس زاویہ ۱۰۰ نصف قوس ۱۰۰ واقع باہرین ضلعین ۱۰۰
قضیت کر بیٹے یکم



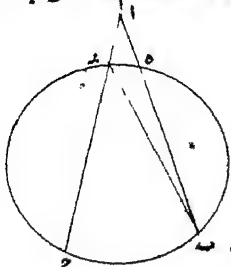
مقاله کدوم

۵۲

مساویت مجموع دو زاویه a و b و مقیاس این دو زاویه نصف دو قوس c و d است

قضیه هفتم

مقیاس زاویه b حادثه مابین دو قاطع a و c که راست در خارج دایره است مساوی با نصف قوس مقعر d نهای نصف قوس مجذبه e بر آنها زاویه مساویت تفاضل دو زاویه b و c است



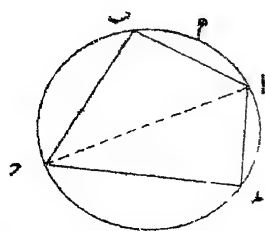
و a و c مقیاس زاویه اول نصف b است و مقیاس دو نیم نصف e

حکم مذکور کلی است اگر چه یکی از دو ضلع زاویه یا هر دو ضلع مماس و یا هر دو ضلع و دلیل همانست که ذکر شد

نکته - قوس a (شکل یقینه اول ۱۹) مکان هندسی رؤس وایا a است که مساوی باشد با c و اضلاعشان مرکبند بر دو نقطه c و b زیرا که جمیع زوایای محاطیه در نقطه a مساوی هستند با c و از دو قضیه سابقه مذکور چنین نتیجه می شود که هر زاویه که ضلعینش مرکبند بر c و b و رؤسش واقع باشد بر قوس a مساوی نیست با زاویه c و b

قضیه هشتم

در هر زاویه که ربع محاطی مثل a و b هر دو زاویه مستطال که تمام محدد یکر باشند تا دو قائمه زیرا که مقیاس مجموع دو زاویه a و b نصف محیط a و b است و بالعکس اگر در دو زاویه ربعی



دو زاویه متقابل α و β تمام همدیگر باشند از شکل قابل محاسب شدن در دایره است
 برضا چون ایره بر نقطه α و β مرسومیم مقیاس زاویه α نصف قوس
 میشود پس مقیاس زاویه β که تمام α است نصف قوس باقی α باشد یعنی زاویه
 مساویست بازوایای محیطیه در نقطه α و این تساوی محقق نشود جز آنوقت که نقطه
 واقع باشد بر قوس α **فهو المطلوب**

مسائل متعلقه بدو مقابل

مسئله اول

میخواهیم خط ab را بر دو جزو متساوی کنیم
 از دو مرکز a و b و شعاعی طول نصف ab و
 قوس رسم کنیم تا مقاطع شوند بر نقطه α این نقطه مساوی البعد است از طرفین a و b
 و همین وجه نقطه دیگر را در فوق یا تحت ab بدست آورید و آن نیز متساوی البعد است
 از همان طرفین و دو نقطه α و β را بخط $\alpha\beta$ وصل کنید و خط مفروض را بر نقطه γ نصف کند
 برها دو نقطه α و β مساوی البعد باشند از طرفین a و b پس باید واقع شوند بر عمود
 وارد بر وسط ab و بر دو نقطه پیش از یک خط نتوان پرورداد پس $\alpha\beta$ همان عمود است
 و ab را بر γ نصف کند

مسئله دوم

میخواهیم از نقطه α مفروضه بر خط ab عمود
 بر آن خط اخراج کنیم
 دو نقطه β و γ را در طرفین a یکفصل کنیم
 و از مرکز این دو نقطه و شعاعی اطول از ab دو قوس رسم کنیم تا بر نقطه α مقاطع شوند و خط

مقاله دوازدهم

۵۴

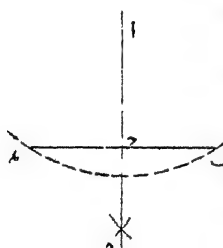
ا. را وصل کنید که عمود مطلوب است
بر همان نقطه، چون مساوی البعد است از طرفین ب و د متعلق باشد به عمود و
بر وسط ب د پس ا. همان عمود است

شرح - هرگاه بخواهیم بر نقطه ا. از خط ب د زاویه قائمه ب. ا. د رسم کنیم باید وجه مذکور را بینه استمال

مسئله ششم

میخواهیم از نقطه ا. مفروضه در خارج خط ب د عمودی بر آن خط وارد آوریم

از مرکز ا. و شعاع مناسبی قوس رسم کنید تا خط ب د
را بر دو نقطه ب و د قطع کند و بعد بطریق مذکور اول
نقطه ش. ه. را بر آن قوس مساوی البعد باشد از طرفین
ب و د یعنی این دو نقطه را مرکز نموده دو قوس یک شعاع
رسم کنید تا متقاطع شوند بر ه و خط ا. ه را وصل کنید که عمود



مطلوب است

بنها دو نقطه او ه مساوی البعد اند از طرفین ب و د پس متعلق اند به عمود ا. ه
که بر وسط ب د خارج شود

مسئله هفتم

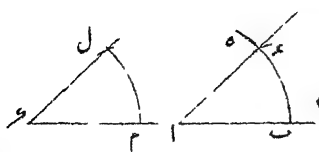
میخواهیم بر نقطه ا. از خط اب زاویه مساوی با زاویه مفروضه که رسم کنیم

از مرکز ا. و شعاعی مناسب قوس م.

را رسم کنید و منتهی نمایدش بدو ضلع زاویه و ا.

مرکز ا. و شعاع ا. د = ل. م قوس غیر من

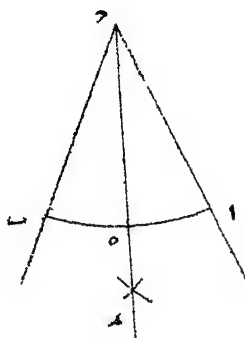
ب. ه را رسم کنید و بعد شعاعی برابر ب. ه



م از مرکز قوس رسم کنید تا قوس غیر محدود ب را بر نقطه م قطع کند
و خط ا ه را وصل نماید که زاویه م ا ب مساوی باشد با زاویه م ف ر و ض ک
بر ه ا و قوس ب م و م ل چون از دو دایره متساویه اند صاحب دو وتر متساوی
مساوی باشند و زاویه ب ا م = م ل ل

مسئله پنجم

منخواهیم زاویه مفروضه یا قوسی مفروض را
برد و جزو متساوی قسمت کنیم



اولاً اگر بخواهیم قوس ا ب را نصف کنیم از دو
مرکز ا و ب و شعاعی مناسب دو قوس رسم کنیم تا
بر نقطه م تقاطع شوند خط م ا را وصل کنیم
و آن قوس ا ب را نصف کند بر نقطه

بر ه ا هر کدام از دو نقطه م و م مساوی البعد اند از طرفین ا و ب از و تمامیه
پس خط م ا عمود باشد بر وسط این وتر پس نصف کند قوس ا ب را بر نقطه ه و ض ک
ثانیاً اگر بخواهیم زاویه ا ح ف را نصف کنیم اول از مرکز ح قوس ا ب را رسم
کنیم و بعد عمل مذکور را جاری کنیم
مشترک - میتوان بهین عمل هر یک از دو نصف ا ه و ه ب را نصف نمود و بنا بر
میتوان بهیچاقت متساویه زاویه یا قوسی را ربع نمود و بعد شش و نصف شش و غیره

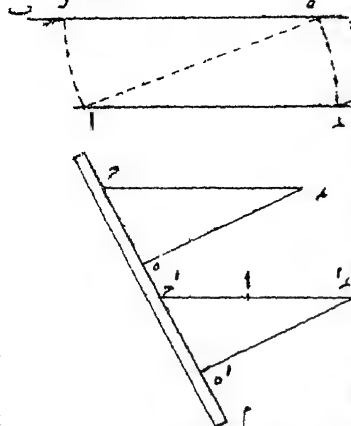
مسئله ششم

منخواهیم بر نقطه انعطافی موازات ب م رسم کنیم
از مرکز ا و شعاعی مناسب قوس م را رسم کنید و از مرکز ه و ب همان شعاع قوس

مقاله دوم

۵۶

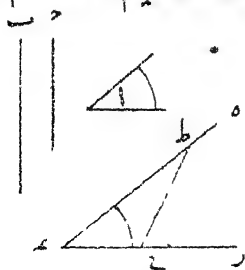
ا د را بعه د را مساوی ا د جدا کنید ف ا را وصل نماید که موازی مطلوب است
برای چون ا ه را وصل کنید دوزاویه متبادله داخله را و ه ا د مساوی میشود



پس د خط ا د و ه د متوازی باشند و ۲۷
این مسئله را بیشتر تا آنکه مینا حل کنیم و آن مثلث
قائم الزاویه است و د ه پس ق ترش را اگر از قیم
بر خط د ه که میخوایم موازی اش بر نقطه ا خطی رود
و بیسم و ستاره ثابتی مثل د م را بر قاعده د ه
اش تکیه دهیم و کونیا را در طول ستاره بلغزانیم تا
و ترش بر نقطه ا گذر د خط د ه را رسم کنیم و آن
موازی باشد با د ه چونکه دوزاویه متقابل د م د و ا د م مساوی میشوند

مسئله ششم

از مثلثی دو ضلع ب و د و زاویه بینها را معلوم میخواهیم مثلث را رسم کنیم
خط د ه را بر نقطه د رسم کنیم دوزاویه د ه د



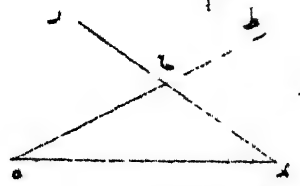
را مساوی از قی د ه رسم و خط را مساوی
ب جدا کنید د ه را مساوی د و ط
را وصل کنید و د ط مثلث مطلوب است

مسئله هفتم

یک ضلع و دو زاویه مثلثی معلوم میخواهیم مثلث را رسم کنیم
دو زاویه مفروضه هر دو مجاوره اند بضلع معلوم و یا یکی مجاوره است و دیگری مقابل پس
اگر چنین باشد زاویه سیم را بقدر مسئله معلوم کنیم و آنوقت دو زاویه مجاوره در

هندسه

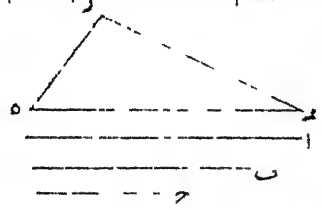
دست است پس خط $هـ$ را مساوی ضلع معلوم رسم کنیم
و بر نقطه $هـ$ رسم کنیم زاویه



$هـ$ در $ر$ را مساوی یکی از اندوز زاویه مجاوره و بر نقطه
 $هـ$ زاویه $هـ$ ط را مساوی زاویه دیگر من و ضلع
 $هـ$ و $هـ$ ط بر نقطه $ط$ تقاطع شوند و $هـ$ مثلث مطلوب است

مسئله چهارم

سه ضلع $ا ب$ و $و$ از مثلثی معلومت میخواهیم مثلث را رسم کنیم

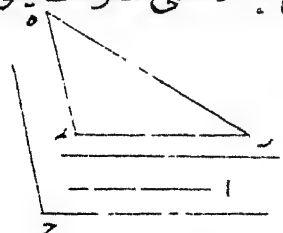


$هـ$ را مساوی ضلع $ا$ رسم میکنیم و از مرکز $هـ$
بشعاعی مساوی ضلع $ب$ قوس رسم میکنیم
و از مرکز $هـ$ و بشعاعی مساوی $و$ قوس دیگر رسم
و دو قوس نقطه $و$ تقاطع شوند و دو خط $هـ$ و

$هـ$ را وصل میکنیم و $هـ$ مثلث مطلوب است
نتیجه شرط امکان عمل آنست که دو قوس هر سوم از دو مرکز $هـ$ و $و$ بر نقطه تقاطع
پس باید ضلع $هـ$ اقصی باشد از مجموع دو ضلع دیگر و ا طول از تفاضل آنها و $و$

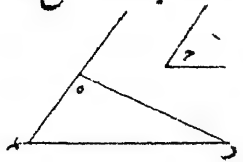
مسئله پنجم

دو ضلع $ا ب$ و $و$ زاویه $و$ مقابل ضلع $ب$ از مثلثی معلومت میخواهیم
آن مثلث را رسم کنیم



این مسئله دو حالت دارد اول آنکه زاویه $و$
قائم یا منفرجه باشد پس زاویه $هـ$ در $ا$ را
رسم میکنیم و $هـ$ را مساوی $ا$ جدا

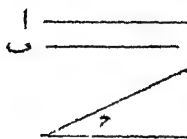
میکنیم و از مرکز ه و شعاعی مساوی ب قوس می کشیم تا خط مد را بر نقطه د قطع کند



و ه را وصل می کنیم مده و مثلث مطلوب میشود
در حالت مذکور باید ضلع ب اطول باشد از آنچه
زاویه قائمه با منفرجه - اعظم است از سایر زوایای



مثلث و ب ضلع مقابلش باید اطول باشد
حالت دوم آنست که زاویه ح حاده باشد پس اگر
ضلع ب اطول باشد از ا عمل مذکور را بهاری می کشیم



مده و مثلث مطلوب میشود

ولی اگر زاویه ح حاده باشد ضلع ب اقصی از ا

قوس هر دو را از مرکز ه و شعاع ه د = ب قطع

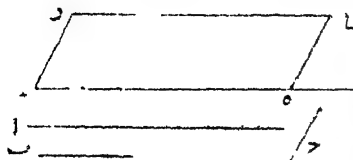
کند ضلع مده را بر دو نقطه د و ط که هر دو در یک سمت م واقع شده اند پس حادث
شود دو مثلث مده و مده ط که هر دو در مسئله صدق کنند

شرح - ضلع ب اگر اقرب باشد از عمود بی که از ه بر م رفود آید مسئله در هیچ حالت
جواب نداشت

مسئله دوازدهم

در متوازی الاضلاع د و ضلع متجاور او ب و زاویه بینهما معلومت میخواهم

انشکال را رسم کنیم



خط مده را مساوی ا رسم می کنیم و بر نقطه م

زاویه مده را مساوی ح و خط م را

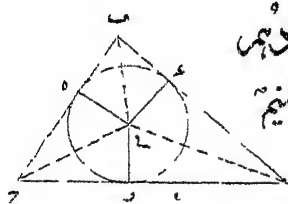
مساوی ب جدا می کنیم و دو قوس رسم می کنیم

میکنیم بر آن و آن مماس مطلوب است و ۲۰۹

و اگر نقطه خارج دایره باشد باین آن نقطه و مرکز دایره را بخط $ح ا$ وصل میکنیم و آن
بر نقطه $ه$ نصف میکنیم و از مرکز $ه$ و بشعاع $ه$ دایره رسم میکنیم تا محیط مفروض را
بر نقطه $ب$ قطع کند و خط $ا ب$ را وصل میکنیم که مماس مطلوب است
برها چون $ح ب$ را وصل کنیم زاویه $ح ا ب$ محیطیه در نصف دایره قائمه باشد
و بنا بر این $ا ب$ عمود باشد بر طرف شعاع $ح ب$ یعنی مماس دایره باشد
شرح - نقطه $ا$ چون در خارج دایره واقع است از آنجا دور مماس تساوی میتوان برد
رسم نمود یکی $ا ب$ است و دیگری $ا ز$ که در دو مثلث قائم الزاویه $ح ب ا$ و $ح ز ا$
چون $ز$ را مشترک است و ضلع $ح ا = ح ا$ این دو مثلث متساوی باشد و ۱۹۸
پس $ا ب = ا ز$ و نیز زاویه $ح ا ب = ح ا ز$

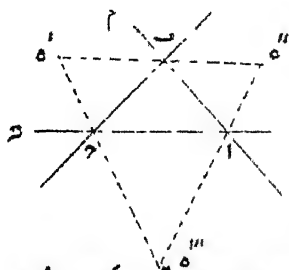
مسئله نهم

میخواهیم دو مثلث $ا ب$ دایره محاط کنیم



بر دو زاویه $ا و ب$ دو خط منصف الزاویه
 $ا و ب$ را مرور دهید این دو خط متقاطع

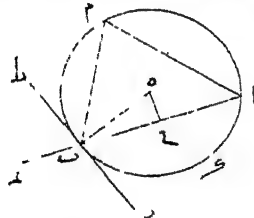
شوند بر نقطه $ز$ و این نقطه متساوی البعد باشد از سه ضلع $ا ب$ و $ا ح$ و $ب ح$ پس
اگر از آن نقطه سه عمود $ز ه$ و $ز و$ و $ز ح$ را بر ضلع مثلث فرود آوریم متساوی شود
و دایره که از این نقطه و بشعاع $ز ه$ رسم شود مماس باشد بر سه ضلع
متنبر $ا$ نقطه $ز$ بیک فاصله است از دو ضلع $ح ا$ و $ا ب$ و متعلق باشد به خط
منصف الزاویه $ح ا$ پس سه خط منصف الزاویه ای مثلث بر نقطه متقاطع شوند
متنبر $ا$ - چون دو زاویه خارجیه $ح ب و ح ز$ را بدو خط منصف کنیم



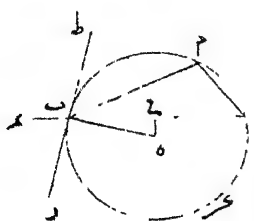
این دو خط بر ه متقاطع شوند و این نقطه مرکز
دایره است که مماس شود بر ضلع ب ج و
بر استقامت د و ضلع دیگر همچنین نقطه
ه و ه مرکز دو دایره باشند که مماس شوند
بر یکی از ضلع مثلث و بر استقامت د و

ضلع دیگر پس معلوم میشود که بر سه خط مفروض چهار دایره میتوان مماس نمود
مسئله کشیدن آنها

میخواهیم بر خط اب قطعه دایره رسم کنیم که قابل احتوائی زاویه مفروضه
باشد یعنی چنان باشد که جمیع زوایای محاطیه اش مساوی باشند با زاویه



اب را بستند امتداد میدیم بر نقطه زاویه
ب ط را مساوی د رسم کنیم و ه را عمود کنیم
بر ب ط و ه را عمود بر ب ط اب این دو
عمود متقاطع شوند بر ه و از این نقطه شعاع



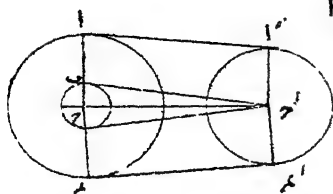
دایره رسم کنیم و قطعه مطلوبه ام ب است
برش چون ب را عمود است بر طرف شعاع
ه ب مماس دایره باشد و قیاس زاویه
اب نصف قوس ا ک ب است و ه ۲ و

قیاس زاویه محیطیه ام ب نیز نصف قوس ا ک ب است پس زاویه ام ب = ا ب
ط ب = د پس جمیع زوایای محاطیه در قطعه ام ب مساوی باشند با زاویه مفروضه
شرح - اگر زاویه مفروضه قائمه بود قطعه مطلوبه نصف دایره باشد و هر سومی بر قطر اب

مسئله فیضیه

میخواهم بر دو دایره خطی مماس مشترک رسم کنیم

اول فرض میکنم مسئله حل شده باشد و ا



مماس مشترک خارج باشد بر دو دایره و دو

شعاع a را d را بر دو نقطه مماس وصل

میکنیم و خط $د$ ب را موازی با a پس دو

شعاع a و d چون عمود اند بر a عمود باشند بر $د$ پس خط ثانی مماس شود بر

دایره که از مرکز $د$ رسم شود شعاع $د$ ب $= د$ - a پس از این قضیه

العمل ذیل استنباط شود

از مرکز $د$ و شعاعی مساوی بفصل $د$ - a دایره رسم کنید و از نقطه a خطی برین

دایره مماس کنید و چون نقطه $ب$ بدست آمد خط $د$ ب را رسم کنید و a را بموازی

$د$ و خط a را خارج نماید که مماس مطلوب است

از دستور العمل مذکور چنین استنباط میشود که مسئله صاحب دو جواب است چنانکه از

$د$ دو خط مماس میتوان بر دایره مرور داد و شرط امکان مسئله اینست که $د$ و a

- a و عبارت آخری اینست که دو محیط متداخل نباشند و الا جواب ندارد

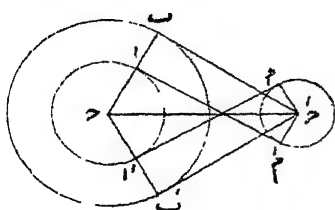
حال میخواهیم خطی مماس مشترک بر دو دایره

رسم کنیم دو شعاع آنها a است و $د$ م

و خط a مماس مطلوب باشد پس بر دو

نقطه مماس $د$ و شعاع a و $د$ م را

وصل میکنیم و خط $د$ ب را بموازی



اُم حال چون اُم عود است برد و شعاع α و $\alpha + \alpha$ خط α ب نیز عمود باشد بر
همانند خط و بنا بر این محاسن شود بر دایره که از مرکز α رسم شود شعاع α ب = α
 α ب = $\alpha + \alpha + \alpha$

و دستور العمل این شد که از مرکز α و شعاعی مساوی مجموع دو شعاع
و دایره مفروضه دایره رسم کنیم و از نقطه α خط α ب برابر آن محاسن کنیم و باقی
عمل را بطریق مذکور جاری نماییم

این شد نیز صاحب دو جواب است ولی شرط امکانش اینست که $\alpha + \alpha \leq \alpha + \alpha$
یعنی محارجه باشد یا محاسن خارج

مسئله چهارم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین دو خط α و α معلوم

کنیم و بعد نسبت عددی آنها را
بزرگتر مقسوم علیه مشترک این دو خط
ممکن نیست از خط اقصی α تجاوز کند

ولی این خط اگر بزرگتر از خط α باشد بکند درین صورت خود بزرگتر مقسوم علیه
مشترک مطلوب است پس از α برابر نقل میکنیم و فرض میکنیم $\alpha = ۲\alpha$
 α و α و میگوئیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین α و α بعینه همانست
که موجود است مابین α و خط α و α

زیرا که هر مقسوم علیه مشترک باشد مابین α و α چون عاود میکند α را
عاود کند α را و چون عاود میکند α را عاود کند درست باقی α پس
مقسوم علیه مشترک باشد مابین α و α

مقاله دوم

۶۴

و از این قرار جمیع مقوم علیه های مشترک مابین ا و ح و د بغیر آنهاست که یافت شود
 مابین ح و ط ب پس بزرگتر آنها نیز یکی باشد
 حال ط ب را بر ح نقل میکنیم و فرض میکنیم ح = ط ب + ک و بطریق مذکور ثابت
 میکنیم که بزرگتر مقوم علیه مشترک مابین ح و ط ب همانست که یافت شود مابین
 و د

حال د را بر ط ب نقل میکنیم و فرض میکنیم ط ب = ۲ ک و خط د را بزرگتر مقوم
 مشترک باشد مابین ا ب و ح
 و از تساویهای سابقه این دو تساوی نتیجه شود

$$\begin{aligned} \text{ح} &= ۳ \text{ ک} \\ \text{ا ب} &= ۴ \text{ ک} \end{aligned}$$

پس نسبت ا ب به ح بقدر ۳ است

تذییه در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسله اعمال منتهی شود باقی صفر و حال سخا
 ثابت کنیم که اگر دو خط صاحب مقیاس مشترک باشد فرض صحیح است و الا اگر اصم باشد
 بصفر نمیرسیم ولی باقی ماند ما متدرجا کوچکتر میشوند تا هر حد که خواسته باشیم
 بر آنها فرض میکنیم و د دو خط مفروض باشد و ب ب ب ب ب ب... باقی ماند ای
 متالی باشد و ر ر ر ر ر ر... خارج قسمت پس این تساوی حاصل شود

$$\begin{aligned} \text{ح} &= ۲ + \text{ب} \\ \text{ا} &= ۲ + \text{ب} \\ \text{ب} &= ۲ + \text{ب} \\ \text{ب} &= ۲ + \text{ب} \end{aligned}$$

.....

باقی ب کوچکتر است از چ زیرا که اگر بیش از یک مرتبه در ب نکلد بزرگتر باشد

چ پس آن بی گوچکه باشد از چ و اگر مد چنبره بر تبه در چ بجه حکم مذکور بطریق اولی صحیح باشد
و بنا بر این این چند نامساوی حاصل شود

$$b > \frac{a}{2} \text{ و بنا بر این } \frac{a}{2} > \frac{c}{2}$$

$$b > \frac{a}{2} \text{ و بنا بر این } \frac{a}{2} > \frac{c}{2}$$

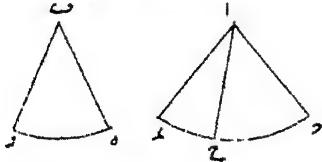
$$b > \frac{a}{2} \text{ و بنا بر این } \frac{a}{2} > \frac{c}{2}$$

و همچنین در مابقی

پس معلوم شد که اگر رشته عمل را بی نذر نه نمند کنیم باقی مانده افتد که کوچک می شود که بخواهد
و بنا بر این اگر مقسوم علیه مشترک در میان باشد البتة باقی مانده صفر خواهد بود و الا لازم
که باقی مانده ای پیدا شود که کوچکتر از مقسوم علیه مشترک و این حکم بنا بر قضیه مذکوره باطل است

مسئله نوزدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین دو زاویه ا و ب را اکتفا
داشته باشد معلوم کنیم و جدا از آن نسبت عددی آنها را



از دو مرکز ا و ب یک شعاع دو گوش

ح و د را رسم کنید و اینها مقیاس

اند و زاویه اند پس بطریق مسئله سابقه

عمل را در دو گوش ح و د جاری کنید زیرا که همانطور که خطی را بر خطی نقل نمیکشیم
میتوان قوسی را نقل نمود بر گوش دیگر که همان شعاع باشد پس اگر این دو گوش را مقوم
علیه مشترک باشد بوجه مذکور بدست آید و بعد نسبت عددی آنها را این نسبت بعینه نسبت مابین
زاویه مفروضه است و این مثل اگر م مقیاس مشترک دو گوش باشد م مقیاس مشترک دو گوش
و اگر دو گوش مفروضه هم باشد و زاویه نیز چنین است و آنوقت باید نسبت تقریبی آنها را بدست آورد

مقاله ششم

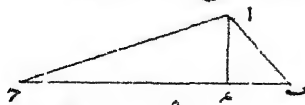
در مقیاس و مساحت اشکال و کثیره الاضلاع و قشایه آنها
حدود

- ۱- مساحت شکل عبارت است از نسبت وسعت آن شکل به وسعت واحد سطح و در کلام ممکن است دو کله سطح و مساحت بجای هم دیگر استعمال شوند
- ۲- دو شکل متعادل آنست که از وضعیت مساحت متساوی باشند و دو شکل ممکن است متعادل باشند با آنکه بحسب صورت بهیچ تشابه نباشند مثل دایره و مربع و همچنین مثلث و مربع مستطیل و امثال آنها
- در دو شکل کله قسای متحقق آنست که چون یکی را آنها بر دیگر نقل شود در جمیع اجزای خود بر هم منطبق شوند مثل دایره که صاحب یک شعاع باشند و دو مثلثی که اضلاع آنها نظیر بنظر متساوی باشند و امثال آنها

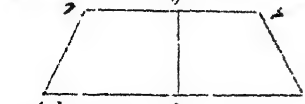
۳- ارتفاع متوازی الاضلاع عبارت است از عموده و که اندازده فاصله با بین



و ضلع متقابل قاعدین اب و جد باشد



۴- ارتفاع مثلث عموده است که از رأس زاویه اخراج شده باشد بر ضلع مقابل یا مدکته قاعد



۵- ارتفاع ذوزنقه عموده است که بین دو ضلع متوازی اب و جد اخراج شده باشد

بقیه قبل از رسیدن باین مقاله و مقالات مابعد باید خواص تناسب را بدست و تفصیل آنرا و اصول حساب و اصول جبر و مقابله ذکر نموده ایم و این نظریات که در احکام و برهان مابعد ابهامی نباشد یعنی تناسب اشاره نمایم تناسب است $ا : ب = ج : د$ و قاعد

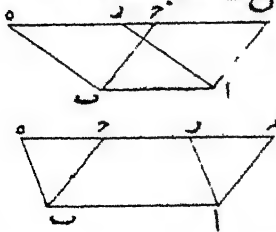
می دانیم که حاصل ضرب طرفین Δ مساویست بحاصل ضرب سطین Δ و
این حکم در عدد محض است و گوئیم مجموع مقادیر تقطع گیرد مشروط بر آنکه بعد از تعریف شده باشد
یا چنان تصور کنیم که تعریف شده اند و این فرض تواند وقوع یافت مثلاً چهار مقدار $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
و اگر خطوط باشند چنان تصور میکنیم که یکی از آنها یا خطی پنجم مقیاس مشترک نداشته باشد
از واحد طول آنوقت هر کدام از $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و تعریفی است از عدد اعاد صحیح باشند
یا گوییم و منطقی باشند یا هم تناسب بین خطوط $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ و ϵ بدلی شود به تناسب
پس منضروب دو خط α و ϵ که سطح نیز کشیم عبارت شد از عدد اعاد طولی α ضرب در عدد
اعاد طولی ϵ و معلومست که چنین حاصل ضرب ممکن است مساوی شود بلکه باید مساوی شود
با حاصل ضربی که بهمانجه از دو خط β و γ بدست آید

و مقدار او ممکن است از نوعی باشد مثل خط و دو مقدار و از نوع دیگر مثل
در این صورت باید مقدار را اعداد فرض نمود و او را احاد طول باشند و احاد
و حاصل ضرب $1 \times 6 \times 6$ و x نیز عدد میشوند

و بطور کلی در جمیع اعمال متعلق به تناسبات باید که آنها هر کدام را عددی فرض نمود
از واحد نوع خود و آنوقت بی رحمت آن اعمال و شیایح شان مفهوم شوند

قصہ کا احوال

فصل اول
 هر دو متوازی الاضلاعی که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند معادل همدیگرند
 برهان اب قاعده مشترک دو متوازی الاضلاع



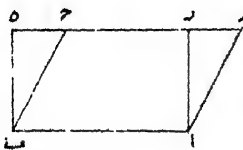
۱۷۷۰ و اب و است و چون ضریب
بر کینار شمع باشند دو قاعده فوقانی
۱۷۷۱ و در واقع شوند بر خط موازی اب و

مقاله سیم

۶۸

تعریف متوازی الاضلاع $ا ب = ح و ا ر = ب ه$ و همچنین $د ر = ا ب و د ه = ا ب$ پس $د ر = ح و ا ر = ب ه$ حال چون از تمام خط $ا ه$ یک مرتبه $د ر$ را می کشیم و مرتبه دیگر $د ه$ را دوباره می کشیم و در مساوی شوند و آنوقت دو مثلث $ا د ر و ح ب ه$ اضلاعشان نظیر بنظر مساوی باشند پس این دو مثلث مساویند

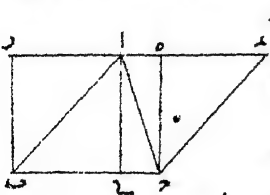
حال چون از دو ارتفاع $ا ب و ح$ مرتبه مثلث $ا د ر$ را موضوع کنیم باقی بماند متوازی الاضلاع $ا ب و ح$ و مرتبه دیگر مثلث $ح ب ه$ را باقی بماند متوازی الاضلاع $ا ب و ح$ پس این دو متوازی الاضلاع مساوی باشند



نتیجه - هر متوازی الاضلاعی مثل $ا ب و ح$ معادل باشد با مضلع $ا ب ه$ که بر قاعده و ارتفاع او است

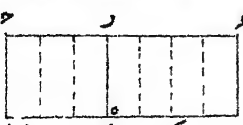
قضیه دوم

مثلث $ا ب ح$ نصف متوازی الاضلاع $ا ب و ح$ است که بر قاعده و ارتفاع آنها باشد



زیرا که دو مثلث $ا ب و ح$ واحد مساوی هستند
نتیجه - هر مثلث $ا ب ح$ نصف مضلع $ا ب و ح$ است که بر همان قاعده $ا ب و ح$ و همان ارتفاع $ا ح$ باشد

زیرا که مضلع $ا ب و ح$ معادلست با متوازی الاضلاع $ا ب و ح$
۲- جمیع مثلثاتی که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند یعنی قاعده شان مساوی باشد و ارتفاعشان



مساوی معادل هم دیگر هستند
قضیه سیم

نسبت دو مستطیل که بر ارتفاع واحد باشند مثل دو قاعده آنها است
دو مضلع مقروض $ا ب و ح$ است و ا ه و ارتفاع مشترک $ا ه$ و میگوئیم نسبت آنها به هم دیگر مثل $ا ب و ح$ است

برونها فرض میکنیم دو قاعده اب و اه منطق باشند و نسبت شان مثل ۷ باشد یعنی مثل
 ا هفت قسمت مساوی کنیم و اه شامل چهار زا که از آنجا شود و از ارتفاع تقسیم کرده بر قاعده
 اخراج کنیم تا هفت سطح جزو مساوی به دست آید چنانکه بر قاعده است و به بر ارتفاع واحد
 و سطح اب ده شامل هر هفت جزو است و اه ده شامل چهار زا که از آنجا است نسبت اب
 به اه ده مثل است یعنی مثل اب به اه و دلیل مذکور کافی است چنانکه تعلق بعد در او
 ندارد پس بنا بر آنکه دو قاعده منطق باشند

$$اب : ده : اه = ا : ع$$

و اگر دو قاعده اب و اه اصم باشند باید مانند وجهی را که در او ذکر شده است اینجا بیان نمود

قضیه چهارم

نسبت در سطح یکدیگر مثل حاصل ضرب دو قاعده آنها است که در دو ارتفاع
 فرض میکنیم و س مساحت دو سطح باشند و ه و د دو بعد سطح س و ق و ع دو بعد
 سطح د که فرض کنیم س بر قاعده اول ه و بر ارتفاع دوم ع پس بر قضیه سابقه

$$س : ه = ع : د$$

$$س : د = ع : ه$$

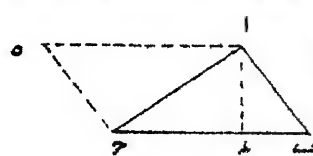
این دو تناسب را جزو جزو بر هم ضرب میکنیم و دو جمله اول تناسب حاصل را بر سطح س قسمت کنیم چنان شود

$$س : د = س : ه = ع : د = ع \times د : ه \times د \quad (۱)$$

در مساحت سطح مساحت نمودن سطح سه عبارت از یافتن نسبت و معنی او
 بمسطحی مثل س که واحد سطح فرض شده

و بنا بر قضیه مذکور این نسبت برابر خواهد بود با نسبت آنکه خطوط ه و د و ع و د را با
 طول سنجیده عدد دیگر را م معلوم کنیم و حاصل ضرب ه و د و اول را بر حاصل ضرب د و د

مساحت مثلث مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در نصف ارتفاع



برهان مثلثات در نصف متوازی الاضلاع

ا ب د ه است که بر همان قاعده د و همان

ارتفاع ا د رسم شده و مساحت شکل ثانی مستوی

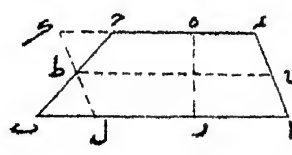
با ب د \times ا د و ه من مساحت مثلث چنین باشد $\frac{1}{2} \times$ ا د یا ب د \times ا د

فلیکن هر دو مثلث که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل د و قاعده است که بر ارتفاع

واحد باشند نسبتشان مثل د و ارتفاع است

قضیه ششم

مساحت ذوزنقه ا ب د ه مساویست با حاصل ضرب ارتفاع ه د



در نصف مجموع دو قاعده متوازی ا ب و د ه

برهان از نقطه ط وسط ضلع د ب خط ک ل را

بموازات ضلع مقابل ا د رسم کنیم و د را امتداد

میدسیم تا آنرا بر نقطه ک تلاقی کند پس د و د مثلث ط ب ل و ط د ک ضلع ط ب

بعل \angle ط د و زاویه ل ط ب \angle ط د ک و زاویه ط ب ل \angle ط د ک چون که د ک

موازیست با ب ل و ط د ک پس این دو مثلث متساوی باشند و ط د ک پس ذوزنقه

ا ب د ه مساویست با متوازی الاضلاع ا د ک ل و میقیاس شکل ثانی نیست

و \times ا ل و ل ا ل \angle و چون مثلث ط ب ل \angle د ک ط ضلع ب ل

\angle د ک پس ا ب \angle د ک \angle د ک \angle د ک \angle د ک \angle د ک و بنا بر این ال نصف مجموع

دو قاعده ا ب و د ه است چنانچه با بیضورت نمونه شود ا ب د ه \times (ا ب + د ه)

شکل چون از نقطه ط وسط د ب خط ط ک را بموازات قاعده ا ب رسم کنیم نقطه

مقاله ششم

۷۲

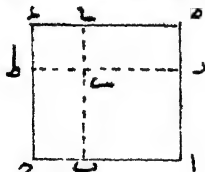
نیز بر وسط a افتد چونکه شکل a ط l و همچنین شکل a ط l نظیر متوازی اضلاع
مقابل متوازی الاضلاعند پس $a = ط$ و $a = ط$ و چون نظیر متساوی
و مثلث b ط l و $ط$ ط $ل$ ضلع $ط$ $ل$ پس $a = ط$
و نیز ظاهر است که $ط = ط = ط = ط$

پس مساحت $ط$ و $ط$ را میتوان نیز باین صورت نوشت $ط \times ط$ یعنی مساویت
با حاصل ضرب ارتفاع در خط واصل با این منصف و ضلع غیر متوازی

قضیه ششم

هرگاه خط a بر دو جز a و b قسماً شده باشد پس مربع تمام a مرکب
باشد از مربع قطعه a با اضافه مربع قطعه b با اضافه مضاعف سطح

دو قطعه a و b یعنی چنین $a^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$



بونها مربع a را رسم کنید و a را مساوی
 a بجد کنید و $ط$ را بموازات a رسم کنید

و $ط$ را بموازات a

پس مربع a بر چهار جزء قسماً میشود جزء اول a $ط$ مربعی است مرسوم بر a
چونکه $a = ط$ و $ط = ط$ و $ط = ط$ مربعی است مرسوم بر $ط$ چونکه $a = ط$
و $a = ط$ پس تفاضل $a - ط = ط$ و بنا بر این $ط = ط$ و نظیر
متوازی اضلاع $ط = ط$ و $ط = ط$ و $ط = ط$ مربعی است مرسوم
بر $ط$ و بعد از وضع این دو جزء از تمام مربع باقی میماند دو سطح $ط$ و $ط$
 $ط$ که کمیت هر کدام نیست $a \times ط$ فیه المطلوب

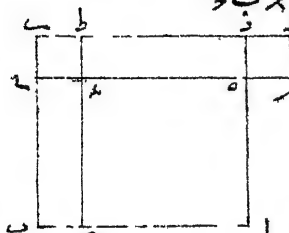
نتیجه فرض میکنیم $ط$ و $ط$ دو عدد باشند نظیر دو خط a و $ط$ هر ضریبی این است و

فلجبر شود $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 و چون مقیاس سطح را معلوم فرض کنیم این تساوی دلیل دیگر است بر قضیه مذکوره
 و در دو قضیه ذیل نیز باید چنین ملاحظه نمود

قضیه نهم

خط اذ تفاضل دو خط اب و ب د است پس مربع ا د مرکب باشد از مربع
 اب باضافه مربع ب د نهای مضاعف سطح اب و ب د یعنی چنین

ا د یا $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
 برهما - مربع اب د را رسم کنید و ا ه را مستوی
 ا د جدا کنید و ح ط را موازات ب د رسم کنید
 و ح ل را موازات اب و مربع ه و ل د را تمام
 پس مقیاس دو سطح ح ط و ط و ل د

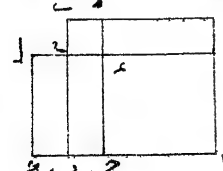


هر کدام ایست $a \times b$ و بعد از وضع آنها از تمام شکل اب ل ه اکتفا
 با $a^2 + b^2 - 2ab$ ظاهر است که باقی میماند مربع ا د ه فوالمطلوب
 حکم مذکور بدستور جبری نیز ثابت شود اندازینقرار $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

قضیه دهم

مسطح مجموع و تفاضل دو خط اب و ب د مساویت با تفاضل دو

اندک خط یعنی چنین $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$
 برهما دو مربع اب د را و ا د ه را برابر و
 ا د رسم کنید و اب را امتداد دهید و پس ا د ه را
 مساوی شود با ب د و سطح ا د ل ه را تمام



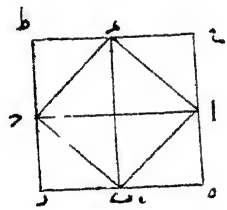
مقاله سیم

۷۶

تا ب ط واقع شود بر مساوی خود ب ا و ضلع ب د نظر مساوی و زاویه ط د و ا ن واقع شود بر ب و نقطه د بر ب و با یکدیگر نظر مساوی و زاویه ب د و ب و د خط د ب منطبق شود بر مساوی خود د

و بهین جنبه ثابت میکنیم که شکل ط د مساویست با ا د ک
پس چهار ذره را بر سه ضلع مساوی شدند و شکل ط د و د ه را معادل گشت با ا ب
د ه و حال چون از یک طرف دو مثلث مساوی راه و ا ب د را وضع کنیم و از طرف
دیگر دو مثلث ا ب د و د ه را باقی بماند مجموع دو مربع ا ب ط + ا د ه
مساوی با مربع ب د ک

نتیجه ۱ مربع یکی از دو ضلع مجاور زاویه قائمه مساویست با مربع وتر متبای مربع دیگر
باینصورت $ا ب^2 = ب د^2 + د ا^2$



۲ - شکل ا ب د مربعی است و ا د قطر
ان مربع و مثلث ا ب د قائم الزاویه است
مساوی است با قین پس $ا ب^2 = ا د^2 + ب د^2$

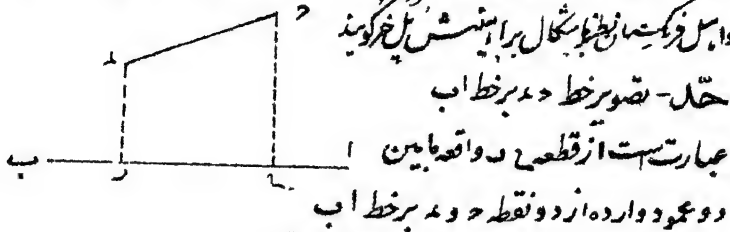
$ا ب^2 = ا د^2 + ب د^2$ پس نتیجه شد که مربع قطرها مضاعف مربع ضلع ا ب است و چون
 $ا ب : ا د = ا د : ب د$ بعد از استخراج جذر این چنین میشود $ا ب : ا د = ا د : ب د$ یعنی
شکل مربع قطر و ضلع متباین باشند

۳ - در وجه اول ثابت شد که مربع ا د معادلت با مستطی ب د ه و و نظر باینکه اگر ارتفاع
ب د بر مربع ب د ط نسبت بمسطح ب د ه مثل قاعده ب د است بقاعده ب د
پس $ب د : ا ب = ا ب : ب د$

یعنی که مربع قند زاویه قائمه نسبت بمربع یکی از دو ضلعش مثل طول و تر است

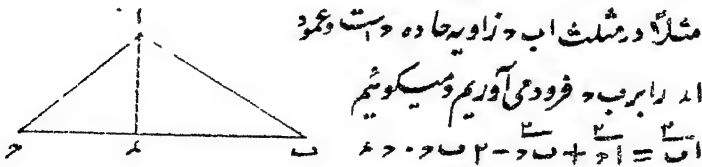
مجاوره که بهما متصل و قطعه عبارت از آن جزو تراست که تحدید شده باشد بمجاوره
از زاویه قائمه و از این قرار بد قطعه مجاوره بصلع اب است و عدد قطعه مجاوره بصلع
ا د و از این قرار بد: $\frac{ا^2}{ا د} = \frac{ب^2}{ب د}$: ح د

عم - دو سطح ب د ه ر و د ه ط ه نیز بر یک ارتفاع و بنا بر این بر نسبت دو قاعده
ب د ه و د ه و چون این دو شکل معادلند بارتفاع اب و ا د پس اب: ا د =
ب د: د ه یعنی که دو مربع دو ضلع بنزایه قائمه بر نسبت دو قاعده و متواند که مجا
آن دو ضلع باشند که بتکثیر مثلث قائم الزاویه نظر نمایند خواص فریت شکل عرض کنیم
و ا ب و ک ت همان خط باشد بر این شکل را اینشش لخر گویند



قضیه دوازدهم

در هر مثلث مربع ضلع مقابل نزایه حاده مساویست با مجموع مربعین ضلع
دیگرهای مضاعف مستطی یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دومین بر ضلع
مثلاً در مثلث اب د نزایه حاده د است و عمود



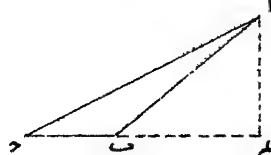
بر این شکل دو حالت دارد اول آنکه عمود داخل مثلث اب د واقع شود پس ب
= ب د - د ه و بنا بر این و $\frac{ا د^2}{ا د} = \frac{ب د^2}{ب د} - \frac{۲ ب د د ه}{ا د}$ و چون
بر طرفین است وی ا د اضافه کنیم ملاحظه نماییم که در دو مثلث قائم الزاویه اب د

مقاله سیم

۷۸

و آمد این دو تساوی حاصل است $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

معادله اول چنین شد $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$



حالت دوم منتهی که عمود از خارج مثلث است واقع شود پس $b = c - d$ و بنابراین $\frac{a}{b} = \frac{a}{c - d}$

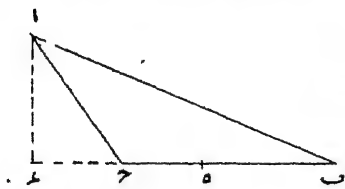
و چون $\frac{a}{b} = \frac{a}{c - d}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{c - d}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{c - d}$

برطرفین آن بفرایم بطریق سابق چنین میشود $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$

قضیه سیم

در هر مثلث منفرجه الزاویه وترج ضلع مقابل بر او منفرجه است و این مجموع دو وترج و یکی با ضلع مضاعف سطح یکی از آن ضلع در تصویر

دو برابر همین ضلع



مثل ضلع اب مقابل زاویه منفرجه در مثلث

اب در پس از برابر ب عمود کنیم و گوئیم

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$$

برها - عمود مذکور ممکن نیست در مثلث واقع شود زیرا که اگر مثلث بر نقطه واقع

میشد آنوقت مثلث ا ب و دارا میشد زاویه قائمه و زاویه منفرجه در او این محال است

پس باید در خارج واقع شود و بنابراین $b = c + d$ و بعد از آن

$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$ و چون برطرفین تساوی آن اضلاع کنیم

نقرف شکل سابق را در آن نمایم چنین شد $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$ و $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c}$

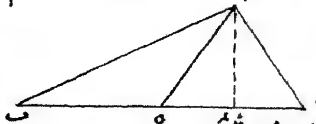
شکل - مثلث قائم الزاویه تنها دارای این صحت است که مجموع دو وترج و ضلع مضاعف

باشد با وترج ضلع سیم زیرا که اگر زاویه واقع باشد بین آن ضلع حاده باشد مجموع آن دو وترج

اعظم باشد از مربع ضلع مقابل و اگر منفرد باشند اصغر باشد از آن مجموع

قضیه چهارم

در مثلث مثل abc چون خط ad از a بر وسط قاعده bc وصل کنیم ad می شود
 $ab^2 + ac^2 = ad^2 + bd^2 + cd^2$



برها عمود ad بر قاعده bc فرود
 آورید نوقت bd و cd در مثلث abd و acd این تساوی نتیجه شود

$$ab^2 + ac^2 = ad^2 + bd^2 + cd^2$$

و در مثلث abd bd برابر cd است و

$$ab^2 = ad^2 + bd^2$$

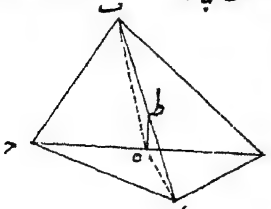
و بعد جمع دو تساوی ملاحظه کنید که $bd = cd$ چنین شود

$$ab^2 + ac^2 = ad^2 + bd^2 + cd^2$$

قضیه پنجم

دو مربع

دو هر دو مربع اضلاع مجموع مربعات چهار ضلعین مساویست با مجموع
 دو قطر یا ضافه چهار برابر مربع خط واصل باین مستصاف دو قطر



برها ad و bd دو قطر دو مربع اضلاع

ab و cd است و bd دو قطر وسط قطر

و خطوط bd و cd و bd را وصل کنیم

آنوقت بنا بر قضیه سابقه در مثلث abd

$$ab^2 + cd^2 = ad^2 + bd^2 + cd^2$$

و بعد جمع $ab^2 + cd^2 + bd^2 + cd^2 = ad^2 + bd^2 + cd^2 + bd^2 + cd^2$ و چون

درمشت ب ه ه ب ه + ب ه = ب ه + ب ه

پس $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{d} = \frac{2}{e} + \frac{2}{f} + \frac{2}{g} + \frac{2}{h}$

و چون $\frac{2}{b} = \frac{2}{c} \quad \text{و} \quad \frac{2}{a} = \frac{2}{d}$ پس

$$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{a} + \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

پس چنانچه اگر دو اربعه ضلع خدیو متوازی الاضلاع باشد خط طه معذور
پس چنین می شود که در هر دو اربعه ضلع مجموع مربعات چهار ضلع مساوی با
مجموع دو مربع و دو قطر و عکس چنین حکم نیز می باشد

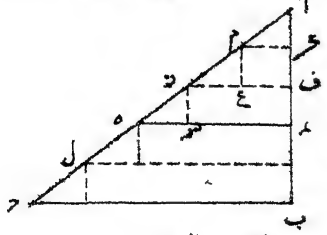
در قضا این شکل قضیه مشهوری می باشد و خطوط متناهی که هر خط که موازی با یکی از اضلاع مثلث رسم شود وضع دیگرش را

نسبت قطع کند

برهان خطی است مواری بقاعده بـ

از مثلث ا ب د و اول فرض میکنیم که دو خط

الم و مد مقاس مشترکی داشته باشد



و آن سه مرتبه در آن بکشی و دو مرتبه در لب و این تناسبی می شود که لب = ۳ : ۲

و بر نقاط تقعر اب خطوطی موازات ب درسم مسکنه و بر نقاط م و ن و و ه و ل

خطوطی عبارات اب تسن جمع مثلثات النسم و تم عن وغمره نظرمساوی

ضلع و دوزا و بظرفین متساوی باشند مثلاً در دو مثلث ABC و DEF سه

دو زاوه م ب ن و ن س ه نظر متوازی ضلع ا شان مساوی باشند و نیز دو ضلع

م ع و ن س ن ط ر م ت ا و ش ا ن ب ا د و خ ل ف و ع ف م ت ا و س ی م ا ش ن د

پس از تساوی این مثلثات چنین نتیجه میشود که $ام = م = ن = ه = ل = ح$

و چون $ا ه$ دارای سبب جزو این است و $ه د$ دارای سبب جزو $ا ه$ است $ا ه : د ه = ۳ : ۲$
 و بعد از مقایسه این تناسب با تناسب سابق چنین نتیجه شود $ا ه : د ه = ا ب : ب ه$
 و اگر دو خط $ا ه$ و $د ب$ هم باشند و مقیاس مشترک داشته باشند باید بطریق ۱
 پیشرفت و ثابت نمود که همواره اند و خط بر نسبت $ا ه$ و $ه د$ است
 نتیجتاً - بزرگ تناسب مذکور این تناسب نتیجه شود $ا ه : د ه = ا ب : ب ه$
 یا $ا ه : ا ب = د ه : ب ه$

و نیز $ا ه : د ه = ا ب : ب ه$ یا $ا ب : د ه = ا ه : ب ه$
 نتیجتاً ۲ - در دو خط $ا ب$ و $د ه$ اجزاء مفروزه
 بخطوط متوازیه $ا د$ و $ه ر$ و $ط$ و $ب د$ و غیره
 متناسب باشند زیرا که چون دو خط $ا ب$ و
 $د ه$ را ابتدا دو سیم بر نقطه تقاطع
 در مثلث $ه ر ط$ از موازیت با قاعده $ه ر$ و اکنون

$ا د : د ر = ا ه : ه ر$ و نیز در مثلث $ط$ این ثابت میشود
 $ه ر : ر ب = د ه : ه ط$ و بعد از وضع نسبت مشترک این تناسب

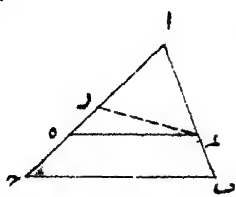
$$ا ه : د ر = د ه : ه ط$$

و همچنین ثابت میکنیم

$$ه ط : ر ب = د ه : ب د$$

قضیه مفصله

و بالعکس اگر در مثلث $ا ب د$ دو ضلع $ا ب$ و $ا د$ را خط $ه ر$ چنان قطع
 نموده باشد که $ا ه : د ه = ا ب : ب ه$ یعنی بر نسبت واحدین خط قاطع
 بموازات قاعده $ب د$ باشد



برها اگر کوئیده موازی نیست باب فرض کنیم
در موازات آن باشد و آنوقت بحکم شکل سابق اء:

$$= ا: د: د و بنا بر فرض اء: د: د = ا: د: د$$

پس نظریست مشترکه اء: د: د = اء: د: د

بعد از تبدیل اء: د: د = د: د: د و این تناسب صحیح نیست چونکه از طرفی مای اء عظم از

ا و از طرفی مای د اصغر است از د پس خطی که از نقطه موازات ب دریم

شود منطبق خواهد شد بر د یعنی اینجا قاطع موازی ده است با قاعده مثلث

شک - اگر خط قاطع این تناسب درست اید اء: د: د = اء: د: د باز حکم مذکور

صحیح است زیرا که بعد از تفصیل چنین شود اء: د: د = اء: د: د - اء: د: د

یا چنین ب: د: د = اء: د: د

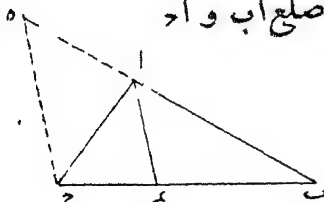
قضیه یکم هجدهم

در مثلث اء: د: د اولاً خط اء منصف زاویه ا قاعده ب: د را قطع کند

و ثانیا خط ب: د موازی با د و ضلع اء: د

و ثامیناً خط اء منصف زاویه کخا ب: د و اتحاد یکنند در امتداد قاعده

د و قطعه ب: د و در برابر نسبت اند و ضلع اء: د



برها حکم اول بر نقطه د خط ده را موازات

ء: د رسم نمائیم تا اشتقاق با اء را بره قطع کند

آنوقت در مثلث ب: د: د خط اء موازی با

قاعده د و این تناسب صحیح میشود و ب: د: د = ب: د: د

ولی مثلث اء: د: د متساوی الساقین است زیرا که نظریه موازی د و د زاویه

ا د ه = ا د و زاویه ا ه = ب ا د و بنا بر فرض ا د = ب ا د پس زاویه

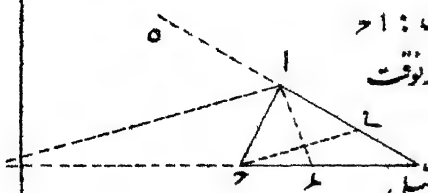
ا د ه = ا د و بنا برین ا ه = ا د حال چون در تناسب بق ا د را بجای ا ه قرار

دهم چنین میشود ب د : د ه = ا ب : ا د

بر خطا حکم ثانیه را بموازات د ا رسم کنید نوقت

در مثلث ب ا د این تناسب حاصل میشود

ب د : د ه = ب ا : ا د و مثلث ا د ه تبدیل



سابق مساوی الساقین است یعنی ا د = ا د پس ب د : د ه = ا ب : ا د

نتیجه چون نقطه ا د در سطح مثلث یز کند بر وجهی که نسبت ا ب به ا د ثابت و برقرار با

فاند و آنرا ا د فرض میکنم دو خطی که در هر موضع ا د و زاویه ب ا د و ه ا د را نصف

کنند همواره مرور نمایند بر همان دو نقطه ششجیه و در زیر که دو نسبت $\frac{ب د}{د ه}$ و $\frac{ا ب}{ا د}$

باز مساوی هستند با $\frac{ب د}{د ه}$ و با بحالت برقرار و چون دو خط ا د و ا د منصف دو زاویه

مجاوره پیوسته بر یک محور عمود اند پس نقطه در جمیع حرکاتش باید واقع شود بر محیط دایره

که بر قطر د رسم شود و بنا بر این مکان هندسی نقاطی که دو فاصله جمیع

از دو نقطه ب و د بودند مفروض ثابتی باشد دایره است

حد مثلثات مشابه مانند که زوایا شان مساوی باشند و اضلاع متناظره

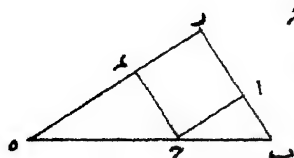
متناسب و مقصود از اضلاع متقابل و متناظره آنها است که متقابل باشند بر دایره مساوی

و و کثیره از اضلاع مشابه مانند که زوایا شان نظیر بطریق مساوی باشند و اضلاع متقابل

متناسب و مقصود از اضلاع متقابل و متناظره آنها است که متقابل باشند بر دایره مساوی

قضیه نهم

در دو مثلث متساوی الزوا یا اضلاع متناظره متناسب باشند



مثلاً دو مثلث مفروض اب د است و ده
که زوایای شان نظیر بنظر متساویست از غیر قرار ب ا د
= ده و اب د = ده و اد ب = ده
و میگوئیم که اضلاع متناظره از این قرار متنا سبند

$$ب : د : ده = اب : د = اد : ده$$

برقما دو ضلع شاطرف د و ده را بر یک استقامت قرار میدیم و دو ضلع با
و ده را امتداد میدیم تا بر نقطه و متلاقع شوند

آنوقت چون خط ب ده متقیم است و زاویه ب د ا = ده ضلع اد موازی

با ده و همچنین چون زاویه اب د = ده خط اب موازیست با ده

پس شکل ا د د متوازی الاضلاع است

در مثلث ب د ده خط اد موازیست با قاعده ده و بنا بر این د ا د = ده

ده = ب ا : ا د و چون بجای ا د مساویش ده را قرار دیم چنین شود

$$ب : د : ده = ب ا : ا د$$

در همان مثلث ب د ده چون ضلع ب د را قاعده فرض کنیم خط ده موازیست با

ا د و بنا بر این ب د : ده = د ا : ده و چون بجای د ا مساویش ا د را قرار

$$ده : د : ده = د ا : ده$$

پس نظیر نسبت مشترک ب د : ده از دو تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود

$$ا د : ده = ب ا : ا د$$

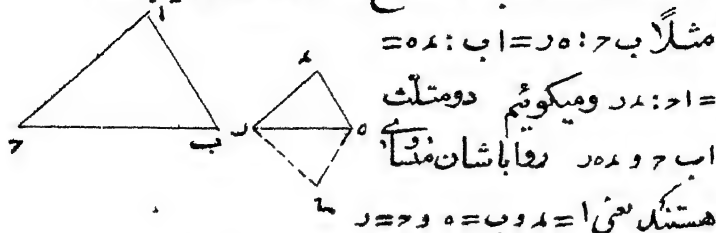
پس دو مثلث متساوی الزوایای ب ا د و ده اضلاع متقابلشان متسا

شد و بنا بر تعریف سابق متساوی باشند

نتیجه - پس شرط تساوی دو مثلث همین کافیت که دو زاویه اش نظیر نظیر مساوی باشد
زیرا که آنوقت زاویه سیم آنها نیز مساوی شود و بعد از آن متعلق متناسب

قضیه نهم

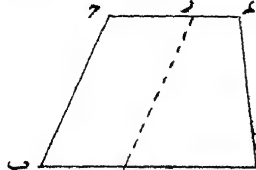
دو مثلث متناسب الاضلاع متساوی الزوایا باشند



برهان - بر نقطه e زاویه e را مساوی b رسم میکنیم و بر نقطه d زاویه d را
 را مساوی c و زاویه e خود مساوی شود با a و دو مثلث $a:b = c:d$ و $e:f$
 متساوی الزوایا گردند پس بنا بر قضیه سابقه $b:d = e:f$ و بنا بر فرض $b:c = e:f$
 $b:d = e:f$ و $b:c = e:f$ در این دو تناسب چون سه جمله مشترک است پس $c:d = e:f$ و نیز
 بنا بر همان قضیه $b:d = e:f$ و بنا بر فرض $b:c = e:f$ و بنا بر فرض $b:c = e:f$
 پس $c:d = e:f$ و پس اضلاع دو مثلث e و d نظیر نظیر متساوی باشند پس
 دو مثلث متساوی و اول و بعامل مثلث e و را مساوی الزوایا سیم با هم
 $a:b = c:d$ و $e:f$ و $b:c = e:f$ نیز متساوی الزوایا باشند

شرح ۱ - باید گفت تویم که زوایای متساویه و مثلث متقابل باشند با اضلاع متناسبه
 ۲ - از این دو شکل چنین استنباط شد که تساوی زوایا لازم دارد تناسب اضلاع را
 و بالعکس تناسب اضلاع تساوی زوایا را بر وجهیکه در تحقق تناسب مثلثات وجود یکی از
 این دو شرط کافی باشد ولی این صحت محقق نمیشد باشد و در بسیاری اشکال که عدد

اضلاع آن زینته و کج و زنجبیت مشدد و اربعه اضلاع میوان بدون تغییر و
نسبت اضلاع را تغییر داد و نیز بدون تغییر اضلاع مقدار زوایا را تغییر داد و از استقرار
از تساوی زوایا شایسته اضلاع لازم نیاید و عکس آن

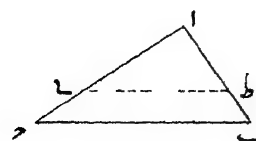
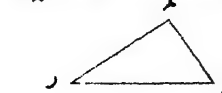


چنانچه که در اربعوزات ب د ر کیم زوایای
دو اربعه اضلاع اه و د مساوی باشند بازوایای
دو اربعه اضلاع اب و د و لی اضلاع بر یک نسبت باشند و نیز بدون تغییر ضلع
اب و ج و د و د میوان و زاویه ب و د را دور و نزدیک نمود و مقادیر

جمع زوایا را تغییر داد
شرح ۳ - چون دو قضیه مذکور را که حکم یک شکل دارند ترکیب کنیم با شکل ع و س این
احکام مفیده تر و کثیر الاستعمال تر جمیع احکام اصول هندسه را متذکر و بتوان گفت که از روی
همین دو سه حکم جمیع مسائل حل شوند و در عملیات ما را کفایت کنند و نکته اش اینست که
بر شکل را بتوان بمثلثات قسمت نمود و هر مثلث را بدو مثلث قائم الزاویه و از این قرار خوا
کلیه مثلثات ضمیمه دارا باشند خواص جمیع اشکال را

قضیه یکتا و یکم

هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین
متناسب باشند و مثلث متشابه باشند



فرض میکنیم زاویه $\alpha = \alpha$ و نسبت $اب : ده = ۷ : ۱$
د و میگوئیم مثلث اب د شبیه است بمثلث ا ج ه
برهان ا ط را مساوی ده جد میکنیم ط ه را به موازات
ب د رسم میکنیم پس زاویه ا ط ه مساوی شود بر زاویه

اب و ج و د و ه و ث و ش و ط و ز و ی و ایش مساوی شود باز و ای می مثلث اب و ج پس
 اب : ا ط = ا ح : ا ب و لی فرض اب : ب ه = ا ح : ا د در بعض ا ط = ب ه پس این
 مناسب در سه جمله مشترکند و بنا بر این ا ب = د ر پس در دو مثلث ا ط و د ه
 وضع و زاویه بینا مساوی است و این دو مثلث مساوی باشند و چون مثلث
 ا ط و شبیه است بمثلث اب و ج پس ب ه در نیز شبیه باشد بمثلث اب و ج

قضیه بیست و دوم

هر دو مثلث که اضلاعشان متوازی باشند یا عمود بر یکدیگر متشابهند
 برهما فرض میکنم ا و ب و ج و د و ی و ا یکی از دو مثلث باشد و ا و ب و ج و د و ی و ا
 مثلث دیگر

و میدانیم که اضلاع د و ز و ا و ی هرگاه متوازی باشند یا عمود نسبت بهم اند و زاویه متساوی
 باشند یا تمام هم یکدگر پس فرضهای ممکنه منتهی بشود و یکی از این سه صورت

$$\text{اولاً} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad ۲ = ۲ \quad ۳ = ۳ \quad ۴ = ۴ \quad ۵ = ۵ \quad ۶ = ۶$$

$$\text{ثانیاً} \quad ۱ + ۱ = ۱ + ۱ \quad ۲ = ۲ \quad ۳ = ۳ \quad ۴ = ۴ \quad ۵ = ۵ \quad ۶ = ۶$$

$$\text{ثالثاً} \quad ۱ = ۱ \quad ۲ = ۲ \quad ۳ = ۳ \quad ۴ = ۴ \quad ۵ = ۵ \quad ۶ = ۶$$

فرض اول مجموع زوایای دو مثلث مساوی شود بیش قائمه

و بر فرض دوم مجموع از چهار قائمه تجاوز کند

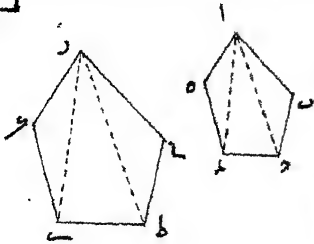
پس همان فرض سیم صحیح و مقبول باشد و بنا بر این دو مثلث مساوی الزوایا و آنوقت شبیه
 بتینک در این شکل اضلاع متناظره دو مثلث نباشند که متوازی یا عمود بر هم یکدیگر

قضیه بیست و سیم

دو کثیرالاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد عددی از مثلثات متشابه متشابه الاضلاع

مقاله سیم

۸۸



پونها در کثیر الاضلاع اب ج ده از زاویه
و قطر ا ح و ا ه را بر ویای غیر مجاوره وصل
میکنیم و در کثیر الاضلاع دیگر ب ج ط - ک
نیز بمجانی از زاویه و قطر ا د و قطر ب ط و
را وصل میکنیم آنوقت نظر بشاید و کثیر الاضلاع

زاویه اب ج = نظر خود و ط و ضلع اب و ب ج متساوی باشند با نظر خود و
ط یعنی اب ج = ب ج = ب ح = ط یعنی در آن وقت یک زاویه مساویست و دو ضلع
طرفین متساوی پس متساوی باشند و زاویه ب ج ح مساوی شود با ط و چون این دو
زاویه متساوی را وضع کنیم از زاویه متساوی ب ج ح و ط باقی میماند ا ح = ط
و حال فکر شد که نظر متساوی و مثلث اب ج و ب ط نسبت ا ح : ب ح = ب ج : ب ح ط
و نظر متساوی و کثیر الاضلاع ب ج ح = ط = ح ط = ط - ب پس سبب شتران نسبت این
و ط = ح ط و قبل از این ملاحظه شد که زاویه ا ح = ط پس و مثلث ا ح
و ط نیز دارای یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متساوی اند و بنا بر این متساوی باشند
و همین وجه ثابت میکنیم که سایر مثلثات هم قریب متساوی اند و از این قرار و کثیر الاضلاع
متساوی ب یک باشند از عده واحده از مثلثات متساوی و متساوی البوضع
مشح - عکس قضیه مذکوره نیز صحیح است یعنی اگر دو کثیر الاضلاع مرکب یا
از یک عده از مثلثات متساوی باشند و متساوی البوضع متساوی باشند
ریز که از شباهت مثلثات متساوی می شود که اب ج = ب ط و ب ح = ط و
ا ح = ط پس ب ج ح = ط و ب ج ح = ط و ب ج ح = ط و غیره و معلوم شد
از شباهت ضلع مثلثات این بنا سبب سلسله می شود اب ج : ب ج ح = ب ج ح : ب ج ح

= ا ح : ط = د = ح : ط و غیره پس زوایای و کثیر الاضلاع متساوی شدند

واضدشان متناسب و بنا بر این متشابهند
قضیه بیست و پنجم

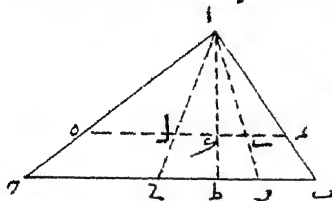
خطوط ا ر و ا ط و غیره که از رأس مثلث بقاعده اش ب و وصل شود
انقطاع و موازیش ده را بیک نسبت قطع کنند این تناسب نتیجه شود
د : ب = د : ح : ط = ل : ط و غیره

برهان خط د چون موازیست با ب و د و مثلث ا د و ا ب ر متساوی
الزوا یا باشند و بنا بر این د : ب = ا : ح : ط و همچنین نظریه موازی د و ط

تناسب حاصل شود ا : د = ل : ط

و بسبب اشتراک نسبت ا : د این تناسب حاصل

شود د : ب = د : ح : ط



و بهمان وجه این تناسب حاصل شود ل : ط :

ط = ل : ط و بگذارد این خط ده قسمت شده است بر نقاط ط و ک و ل و بر
نسبت که خط ب د بر نقاط ر و ط و ح قسمت شده

نتیجه پس اگر ب د را بر نقاط ر و ط و ح با جزی مساویه قسمت کنیم موازیش ده
نیز با جزی مساویه قسمت شود بر نقاط ط و ک و ل

قضیه بیست و ششم

چون از زاویه قائمه از مثلث قائم الزاویه با د عمود ا د بر وتر خارج کنیم

اولاً د و مثلث ج ر و ا ب د و ا د متشابهند و مشابه با مثلث کل

ثانیاً هر کدام اند و ضلع ا ب و ا د واسطه هندسی باشند ما بین وتر ب د

مقاله سیم

۹۰

و قطعه مجاوره خود ب Δ یا Δ

ثالثاً عود Δ واسطه هندسی باشد مابین Δ و قطعه Δ و Δ

برها اولاً دو مثلث Δ و Δ با Δ مشار کنند

در زاویه Δ و علاوہ بر آن دو زاویه Δ و Δ با Δ

قائم اند پس زاویه Δ نیم Δ باشد از مثلث اول مساوی

باشد با زاویه Δ از مثلث دیگر و این دو مثلث متساوی

الزوا یا باشند و متساوی و همین وجه ثابت میکنیم که مثلث Δ از شپش است بمثلث Δ

با Δ پس این سه مثلث متساوی الزوا یا باشند و متساوی

ثانیاً چون مثلث Δ با Δ شپش شد بمثلث Δ اضلاع متناظرشان متساوی باشند

و ضلع Δ از مثلث کوچک نظیر با Δ از مثلث بزرگ چون مقابلند بدو زاویه

متساویه با Δ و وتر Δ از مثلث کوچک نظیر است با وتر Δ از مثلث بزرگ

پس این تناسب صورت بندد $\Delta : \Delta = \Delta : \Delta = \Delta : \Delta$ و همچنین $\Delta : \Delta = \Delta : \Delta$

$\Delta : \Delta = \Delta : \Delta$ پس معلوم شد که هر کدام از دو ضلع Δ و Δ واسطه هندسی باشند

مابین وتر و قطعه مجاوره خود

ثالثاً بمشابه دو مثلث Δ و Δ و مقایله اضلاع متناظره آنها این تناسب

حاصل شود $\Delta : \Delta = \Delta : \Delta = \Delta : \Delta$ پس عود Δ واسطه هندسی باشد مابین Δ و قطعه Δ و Δ

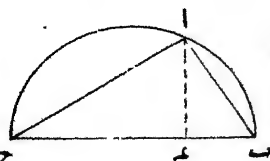
شرح - در تناسب $\Delta : \Delta = \Delta : \Delta = \Delta : \Delta$ چون سطح طرفین Δ و Δ کنیم با سطح Δ و Δ

چنین میشود $\Delta^2 : \Delta^2 = \Delta^2 : \Delta^2$ و همچنین $\Delta^2 : \Delta^2 = \Delta^2 : \Delta^2$ و بعد از جمع دو طرف

$\Delta^2 + \Delta^2 : \Delta^2 = \Delta^2 + \Delta^2 : \Delta^2$ و جزء ثانی با این صورت تحویل میشود $(\Delta^2 + \Delta^2) : \Delta^2$

$\Delta^2 : \Delta^2 = \Delta^2 : \Delta^2$ پس $\Delta^2 : \Delta^2 = \Delta^2 : \Delta^2$ یعنی مربع وتر Δ مستوی

باجمیع دو طرف و ضلع دیگر اب و اد پس بوجه بسیار دور باز رسیدیم شکل
پس معلوم میشود که در مثلثات متساویه الزوایا خاصیت شکل عروس لازمه است
اضلاع است



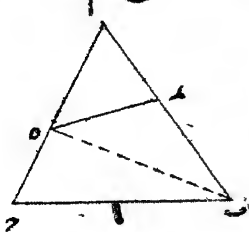
نتیجه چون نقطه ا محیط دایره دو وتر اب و اد
را بطرفین قطر ب و وصل کنیم مثلث ب ا د
قائم الزاویه میشود بر نقطه ا و ق

پس اگر معلوم بود که فاصله هندسی باشد مابین دو قطعه ب و د و قطر
دایره و عبارت آخری مربع آن مساوی باشد با مستطی ب د \times د
ثانیا وتر اب و فاصله هندسی باشد مابین قطر ب و قطعه ب د و عبارت
آخری $اب^2 = ب د \times د$ و همچنین $اد^2 = د ب \times اب$: $اد = ب د$
د و چون $اب$ را به $ب$ بسیم این تناسب غلط شود $اب : ب د = ب د : ب د$
ب د و همگذا $اد : ب د = د د : ب د$ و این شبیهان نیاز است که سابق در قضیه ذکر

قضیه کلیت و ششم

هر دو مثلث که دارای یک زاویه مساوی باشند نسبتشان به یکدیگر
مثل دو سطح اضلاعی است که حاوی آن زاویه اند مثلا نسبت

اب د به ثلث ا د مثل مستطی اب \times اد باشد مستطی ا د \times ا ه



برها ب ه را وصل کنیم نوقت دو مثلث

اب ه و ا د ه مشار کنند در رأس ه و بر

ا د شعاع ا د اند پس نسبت دو قاعده ا د

و ا د باشند و باین صورت

مقاله سیم

۹۲

ا ب : ه : ا ه = ا ب : ا ه و بهما نوجه این تناسب حاصل شود

$$ا ب : د : ا ب ه = ا : د$$

وبعد ضرب د و ثا سب و حذف جمله مشترک ا ه این تناسب حاصل شود

$$ا ب : د : ا ه = ا ب \times ا د : ا ه \times ا ه$$

نتیجه پس اگر مسطح ا ب \times ا د مساوی باشد با مسطح ا ه \times ا ه و عبارت آخر

ا ب : ا ه = ا د : ا ه دو مثلث معادل یکدیگر میشوند و این حالت وقتی اتفاق

افتد که خط د د موازی شود با ب ه

قضیه بیست و هفتم

دو مثلث متشابه بر نسبت دو مربع هر دو ضلع متناظر باشند

بر آنها - زاویه ا = د و زاویه ب = ه

پس اول نظر تساوی و زاویه اول بنا بر قضیه

$$ا ب : د : ا ه = ا ب \times ا د : ا ه \times ا ه$$

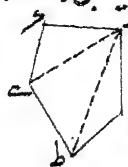
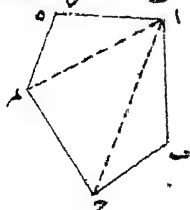
$$\text{و اگر اید کنیم با این صورت} \quad \frac{ا ب}{د} \times \frac{ا د}{ا ه} = \frac{ا ب}{ا ه} \times \frac{ا د}{ا ه}$$

و نظر متشابه دو مثلث این تساوی حاصل شود $\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب}{ا ه} \times \frac{ا د}{ا ه}$ پس $\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب}{ا ه}$

$$\frac{ا ب}{د} = \frac{ا ب}{ا ه} \times \frac{ا د}{ا ه} =$$

قضیه بیست و هشتم

دو و یکبار اضلاع متشابه و محیط بر نسبت هر دو ضلع متناظر اند و د و د



بر نسبت دو مربع اند و ضلع

برها اول بنا بر تعریف شکل متشابه

$$ا ب : د : ا ه = ا ب \times ا د : ا ه \times ا ه =$$

= ۶ : ۲ ط - و غیره و از ترکیب این نسب متساویه چنین استنباط شود که نسبت مجموع
 مقدمات اب + ب + ج + د + ه + ... یعنی محیط شکل اول مجموع توالی ۲ + ۳ + ۴ +
 ط - و غیره یعنی محیط شکل ثانی مثل یکی از مقدمات است بتالی خود مثل اب : ۲
 ثانیاً - نظر بتثابه و مثلث اب ح و د ط این شتاب حاصل شود ۲ : ۳
 اب ح : د ط = ۲ : ۳ و ۴ : ۵ و ۶ : ۷ و ۸ : ۹ و ۱۰ : ۱۱ و ۱۲ : ۱۳ این شتاب
 د ط = ۱ : ۲ و ۳ : ۴ و ۵ : ۶ و ۷ : ۸ و ۹ : ۱۰ و ۱۱ : ۱۲ و ۱۳ : ۱۴ این شتاب حاصل شود
 اب ح : د ط = ۱ : ۲ و ۳ : ۴ و ۵ : ۶ و ۷ : ۸ و ۹ : ۱۰ و ۱۱ : ۱۲ و ۱۳ : ۱۴ و ۱۵ : ۱۶
 و - که و هکذا در آن صورت که عدد مثلثات از سه تجا و زکن پس ترکیب شتاب آخر
 نسبت مجموع مقدمات اب + ب + ج + د + ه + ... یعنی مساحت کثیر الاضلاع
 اب ح د ب مجموع توالی ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶
 و ویم مثل مقدمات اب ح است بتالی خود د ط یا مثل اب : ۲
 پس هر کثیر الاضلاع متساویه بر نسبت دو مربع هر دو ضلع متناظر باشند
 فیثقیل - هر گاه سه شکل متساویه ترتیب دسیم بر وجهی که سه ضلع متناظرشان سه
 ضلع مثلث قائم الزاویه باشد پس کل هر سوم بر ضلع طول مثلث مساوی باشد
 با مجموع دو شکل هر سوم بر دو ضلع دیگر مثلث ریز که اینجی شکل بر نسبت مربعات
 اضلاع متناظر اند و یکی از این مربعات مساویست با مجموع دو مربع دیگر فهو المطلوب

قضیه بیست و نهم

در ذاین اد ب اجزای دو و دو متقاطع اب و ح د متناسب باشند
 بر متناسب معکوس با این صورت ا ه : ۴ : ۵ = ۶ : ۷
 بر هتا و د خط ا ح و ب د وصل کنیم نوقت در دو مثلث ا ح د و ب ه

مقاله

۹۴

دو زاویه چون متقابل بر سر اند مساوی باشد و زاویه او چون محیطی اند و
در یک قطعه مساوی باشند و ۱۹ و همچنین دو زاویه

ح و ب پس این دو مثلث تشابه باشند و ضلع ه ط ا ط ه مناسب با این صورت

$$۵۴ : ۵۱ = ۵۶ : ۵۳$$

نتیجه از تناسب مذکور این می شود $۵۱ \times ۵۶ = ۵۴ \times ۵۳$
یعنی که سطح دو مجز و تری مساویست با سطح دو مجز و تری دیگر

قضیه سی و نهم

چون از نقطه واقع در خارج دایره دو خط قاطع ب و ه در آن رسم کنیم
و منتهی کنیم هر دو را بقوس مقرب پس تمام اند و خط متناسب باشند
بر نسبت عکس از دو مجز و خارجی خود بر وجهی که این تناسب صورت گیرد

$$۵۱ : ۵۴ = ۵۶ : ۵۳$$

برهان چون دو خط ا ح و ب در اصل کنیم
و مثلث ه ا ح و ه ب ب مشارک باشند

در زاویه ه و علاوه بر آن زاویه ب = د

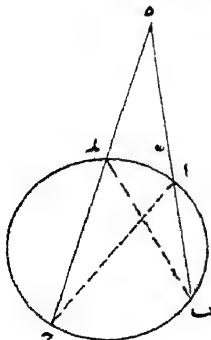
و ۱۹ پس تشابه باشد و ضلع متقابل

$$۵۱ : ۵۴ = ۵۶ : ۵۳$$

نتیجه از تناسب مذکور چنین نتیجه میشود که سطح ۵۱×۵۶ مساویست با سطح

شرح دو شکل مذکور کمال مشابهت دارند و تفاوتی ندارند جز از این جهت که در شکل اول

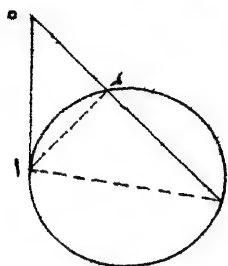
قاطع دو وتر ا ب و ح در دایره واقع شده و در شکل ثانی در خارج



هندسه

قضیه سی و یکم

چون از نقطه واقع در خارج دایره خط را زائما کنیم و دو قاطع
خط مناسب از سطح هندسی باشد ما بین قاطع و جزو خارجی خود بر
کدام تناسب حاصل شود $۱۰:۷۰ = ۱۰:۵۰$ و عبارت از این $۲۵ \times ۷۰ = ۱۰ \times ۵۰$

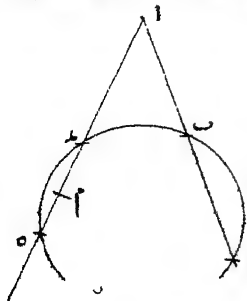


بر آنها بعد از وصل دو خط a و b دو مثلث a و b
و a و b مشارک میشوند در زاویه e و علاوه بر آن
زاویه a و b حادیه بین قاطع و وتر مقایسه نصف
قوس a است و ۲ و ۱ و زاویه c نیز به مقتضای
است پس زاویه $c = ۷۰$ و a و b دو مثلث تشابه

باشد و این تناسب به سبب $۱۰:۷۰ = ۱۰:۵۰$ یا $۲۵ \times ۷۰ = ۱۰ \times ۵۰$
شکل این شکل نیز از شکل سابق استنباط شود بنا بر آنکه قاطع و وضع خط
قاطع متحرک و در حول نقطه e و اینم

قضیه سی و دوم

چون در خط a و b متقاطع این نقطه a و b و c و d و e و f و g
اختیار کنیم که $a \times b = c \times d$ و اگر کوئیم این چهار نقطه بر محیط دایره واقع باشند که



بر آنها اگر کوئیم دایره a و b بر سه نقطه c و d و e
قاطع خط a است بر نقطه c و بر نقطه e و f
این بنا بر اصل $a \times b = c \times d$ و بنا
بر فرض $a \times b = c \times d$ و این تساوی
شود $a \times b = c \times d$ و این حکم صحیح نیست

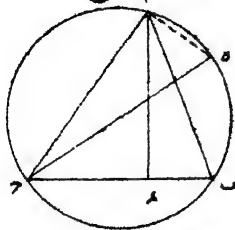
مقاله سیم

۹۶

و اگر کو شم دایره ماره بر سه نقطه د ب و د ماس میگرد خط اه را بر نقطه م این
 تساوی ماس میشد اب \times ا = ا \times م و بنا بر فرض اب \times ا = ا \times م = ا \times م پس ا = م

قضیه سیم و سیم

در مثلث اب د مستطی دو ضلع اب و اد مساویت با مستطی قطره از د
 محیطی و عمود اه و ا د بر ضلع سیم ب د

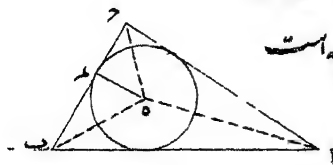


بونها بعد از وصل اه و مثلث اب د و اه
 قائم الزاویه میشوند یکی بر د و دیگر بر ا و علاوه بر این
 زاویه ب = ه پس این دو مثلث متشابه باشند

و این تناسبی می شود اب : ده = ا : م و بعد از این تساوی اب \times ا = د \times م
 فلیجبر طرفین این تساوی را در د ضرب میکنیم چنانچه اب \times ا \times د = د \times م \times د

ا م \times ب د و چون ا م \times ب د مضاعف سطح مثلث است و م پس حاصل
 ضرب سه ضلع هر مثلث مساوی باشد با حاصل ضرب مساحت در مضاعف قطر دایره
 و حاصل ضرب سه خط را نظر بآنچه بعد از این ذکر خواهم شد بگویم و تفسیرش بر این وجه باشد
 که آن خطوط را با هم و مبدل کنیم و بعد در هر یک ضرب نماییم

شکل این حکم نیز محقق است که مساحت هر مثلث مساویت با حاصل ضرب
 محیطش در نصف شعاع دایره محیطیه در آن مثلث
 بونها مثلثات اه ب و د و اه د مشارکنند



در رأس ه و ارتفاع شمع ه دایره محیطیه است
 پس مجموع این مثلثات مساویت با سطح
 مجموع آنرا عدد اب و ب د و اه

در نصف شعاع هـ پس ساحت مثلث اب د مساویست با دور هـ در نصف شعاع
وایره محاطیه

قضیه سی و چهارم

در گذر واریع داخل محاطیه اب د سطح دو قطر اد و ب د مساویست و مجموع
دو سطح هر دو ضلع متقابل بر وجهیکه این تساوی حاصل شود اد \times ب د =

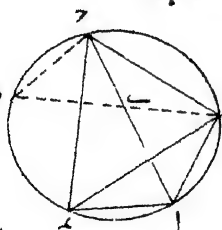
$$\text{اب د} \times \text{د} + \text{ا د} \times \text{ب د}$$

برهان هـ را مساوی اء بد کنید واصل نمایند ب ه را تا قطع کن قطر اد شکل را بر نقطه
اوقت زاویه اب د = د ب - چونکه مقیاس یکی نصف اء است و مقیاس دیگر
نصف د ه = اء و زاویه اب د = ب د - چونکه هر دو محاطیه اند در قوس اء ب
پس مثلث اب د مشابه است با مثلث ب د - و این تناسب نتیجه شود اء د : د -

$$= \text{ب د} : \text{ب د} \text{ و بعد این تساوی اء د} \times \text{ب د} = \text{د} \times \text{ب د}$$

حال کوینم مثلث اب د مشابه است با مثلث ب د د

چونکه قوس اء مساویست با د ه و بعد از آنکه ه د برابر ب
طرفین ضاع کنیم قوس اء مساوی شود با د و نیز زاویه



$$\text{اب د} = \text{د ب د} \text{ و علاوه بر آن زاویه ب د ا} = \text{ب د د}$$

چون محاطیه اند در یک قوس پس دو مثلث اب د و د ب د متشابه باشند و ضلع متقابل

متشابه بصورت اب : ب د = اء : د ه و بعد این تساوی اب \times د = اء \times د

حال چون د و د است آءه را با هم جمع کنیم و ملاحظه نمائیم که اء \times د + د \times د =

$$\text{اب د} \times (\text{د} + \text{د}) = \text{ا د} \times \text{ب د} \text{ و تساوی مقصود بدست آید از این قرار}$$

$$\text{ا د} \times \text{ب د} + \text{د} \times \text{ب د} = \text{ا د} \times \text{ب د} + \text{د} \times \text{ب د}$$

مقاله سیم

قضیه سیم و پنجم

دو قطر ذوار بکدام اضلاع نماطیه بر نسبت دو مجموع مسطحات اضلاع
باشند که منتهی شده اند باطر افارقه و قطر

برها و شکل سابق ذوار بکدام اضلاع اب د و ر قطر ا ب د و مثلث اب د و ا د
قسمت نموده و چون شعاع دایره محیطه را ن فرض کنیم این دو تساوی نتیجی میشود

$$ا ب \times ب د \times د = ا ب \times ا د \times ا$$

$$ا د \times ا ب \times ب د = ا ب \times ا د \times ا$$

و بعد از جمع چنین میشود (ا ب \times ب د + ا ب \times ا د) = (ا د \times ا ب + ا ب \times ب د) و چون
بقطر ب د همان ذوار بکدام اضلاع را بد و مثلث قسمت کنیم همانجا برایت وی حاصل شود

$$ب د \times (ا ب \times ا د + ا ب \times ب د) = ا د \times (ا ب \times ب د + ا ب \times ا د)$$

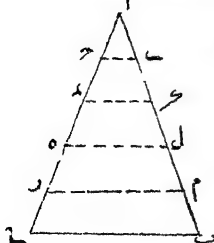
و بعد ا د \times (ا ب \times ب د + ا ب \times ا د) = ب د \times (ا ب \times ا د + ا ب \times ب د) و از آنست وی این تناسبی نتیجه شود

$$ا د : ب د = ا ب \times ا د + ا ب \times ب د : ا ب \times ا د + ا ب \times ب د$$

در مسائلی متعلقه بمقاله سیم

مسئله اول

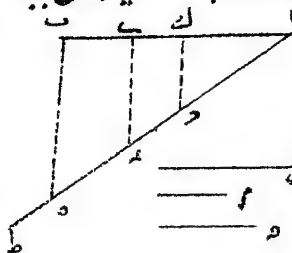
میخواهیم خط مفروضی را بر اجرای متناهی قسمت کنیم تا بر نسبت خطوط معین



اولاً میخواستیم خط اب را بر پنج جزو مساوی قسمت کنیم پس
بر طرف خط غیر معین ا ب را مرکز میسازیم و قطعه ا ب را
بمقدار ا د مثلا جد میکنیم و از پنج مرتبه تا ب نقل میکنیم
و نقطه ب را بطرف ب وصل میکنیم و بعد ح د را

بموازات ب رسم کنیم و میگوئیم این خط اب است و چون آنرا پنج مرتبه برابر
فصل کنیم آن خط برونج جزء مساوی قسمت شود

برهان چون د موازیست با ب و ضلع ا و اب بر دو نقطه د و ب
بر یک نسبت قسمت شوند و ا و خمس ا است پس این نیز خمس اب است



ناتینجه میسیم اب را بر نسبت خطوط ل و م و ن

قسمت کنیم پس بر طرف ا خط غیر معین ا ط را رسم کنیم

و ا د را مساوی ل جدا کنیم و د را مساوی م

و د را مساوی ن و نقطه ه را به ب وصل کنیم

و بر د و د و خط د ک و د را بموازات

ب رسم میکنیم و میگوئیم خط اب قسمت شده است با جزای ا د و ک و ب

نسبت خطوط ل و م و ن

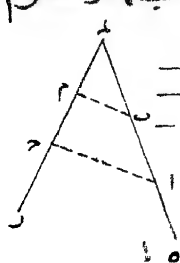
برهان نظریه تراز می خطوط د ک و د و ب با جزای ا د و ک و ب

متناسب باشد با جزای ا د و د و د و ب و ب و ب با جزای ا د و ک و ب

مفسر و ضل و م و ن جدا نموده بودیم

مسئله دوم

سه خط ا و ب و د مفروض است میخواهیم چهار متناسب آنها را معلوم کنیم



و نقطه د و د را با زاویه رسم کنید

و از د جزو عا را مساوی جدا کنید

و د ب را مساوی و از د جزو د

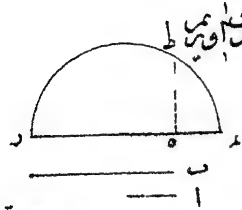
را مساوی جدا کنید و خط ا د را وصل

مقاله سیم

۱۰۰

کنید و از نقطه ب خط ب م را موازات او رسم کنید پس م م چهارم باشد مطلوب باشد
 فنها چون ب م موازیت با او این شائب حاصل شود $ما: مد = م: مم$ پس
 و سه جز اول این شائب را مساوی آن خط مفروض جدا کرده ایم پس م م جزء مطلوب
 نتیجه - هرگاه دو خط او ب مفروض باشد جزو شائبش را همین وجه معلوم کنیم و بخواه
 جزء چهارم باشد از سه خط او ب و ب

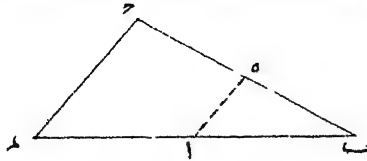
مسئله سیم



میخواهیم فاصله هندسی را بین دو خط او ب و ب بدویم
 از خط غیر معین دو جزء را مساوی جدا کنید
 و د را مساوی ب و بر قطر مد نصف داره
 م ط د را رسم کنید و از نقطه م عمود ه ط را بر قطر
 اخراج کنید و امتداد دهید تا بر نقطه ط بدایره منتهی شود پس ط ه ط واسطه هندسی
 بر آنها عمود ط ه و ا و از نقطه ط محیط بر قطر واسطه هندسی باشد مابین دو نقطه م و د
 قطرها و این دو قطعه را مساوی دو خط مفروض او ب جدا نخت بودیم
 و بعد دیگر م د را مساوی ب جدا کنید و م د را مساوی او بر قطر مد داره
 رسم کنید و ه ط را عمود بر م د و نقطه ط را وصل کنید بنقطه م پس خط ط م واسطه
 هندسی باشد مابین ب و ا

و جمعیت - در شکل ۱ خط م د را مساوی ب جدا کنید و م د را مساوی
 و در دو نقطه م و د دایره م و د را رسم کنید و از نقطه ه خط ه را مماس بر آن دایره کنید پس
 طول ه ا واسطه هندسی باشد مابین ب و ا
 مسئله چهارم

میخواهیم در زاویه ب د خط ب د را بر نقطه ای جان در دهیم که قطعه
 اب و ام واقع در مابین او دو ضلع زاویه متساوی شوند
 از نقطه ا خط اه را موازیات مد رسم کنید و ب را مساوی ده بکشید و خط ب
 ا د را بر دو نقطه ب و ا م در آورید

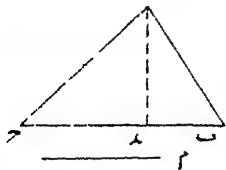
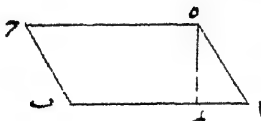


و خط مطلوب است

برها چون اه موازیات با د م
 نسبت ب ه : ه د = د ب : ا م و بعل ب ه = د ب پس ب ا = ا م

مسئله پنجم

میخواهیم مربعی متوازی الاضلاع یا مثلث مفروضه رسم کنیم



اولا اب قاعده متوازی الاضلاع است و ه د
 ارتفاع آن م ضلع مربع مطلوب پس باید این شرایط باشد

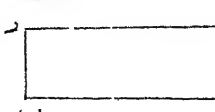
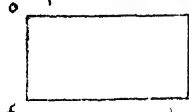
$$م^2 = اب \times م$$

$$یا اب : م = م : م$$

یعنی ضلع مربع واسط هندسی باشد مابین اب و م
 ثانیاً همین به معلوم شود که ضلع مربع معادل باشد
 مفروض واسط هندسی باشد مابین قاعده آن مثلث و نصف

مسئله ششم

میخواهیم بر خط ا د مسطح ا د م را معادل با مسطح مفروض اب د م رسم کنیم



ا م ارتفاع مجبور مسطح
 ا د م است چون دو مسطح

مقاله سیم

۱۰۲

باید متعادل باشند این تساوی نتیجه می شود $ا ب \times ا د = ا م \times ا ح$ و بعد این تناسب
 $ا م : ا ب = ا ح : ا د$ پس خط مطلوب چهارم جزو تناسب شد در خط $ا م$ و $ا ب$ و $ا$

مسئله هفتم

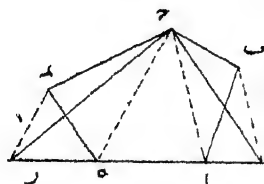
میخواهیم دو خط بدست آوریم بر نسبت مساحت دو منطبق مفروض
 ا و ب دو بعد سطح اول باشد و $و$ دو بعد ثانی و یکی از دو خط مطلوب طولش اختیار
 است و آنرا $ا$ فرض میکنیم خط مجهول ثانی $ا م$ پس موافق صورت مثلثین سابق حاصل

$$ا ب : ا د = ا م : ا ح$$

$$\text{و بعد } م = \frac{ا \times ب \times ح}{ا ب \times ا د}$$

پس خط مطلوب جزو چهارم باشد و در خط $ا ب$ و $و$

مسئله هشتم



میخواهیم مثلثی معادل کثیر الاضلاعی رسم کنیم

شکل $ا ب د$ کثیر الاضلاع مفروض است پس

قطر $د ه$ را وصل کنیم و آن مثلث $د ه ز$ را جدا سازد

و بر نقطه $د$ خط $د و$ را بموازات $د ه$ رسم کنید تا استقامت $ا ه$ را بر نقطه $و$

قطع کند و $و$ را وصل کنید پس کثیر الاضلاع $ا ب د$ معادل شود با کثیر الاضلاع

$ا ب د$ که یک ضلع کمتر دارد

زیرا که دو مثلث $د ه و$ بر قاعده مشترک $د ه$ باشد و نیز برابر ارتفاع $د ه$

چونکه دور $ا ب د$ واقع باشد بر خط $د و$ که بموازات قاعده است پس این

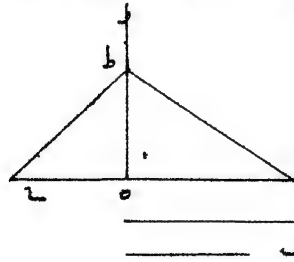
دو مثلث متعادل باشند چون بر طرفین شکل $ا ب د$ را اضافه کنیم زیادهای کثیر الاضلاع

$ا ب د$ ترکیب شود از طرف کثیر الاضلاع $ا ب د$ و این دو متعادل گردند

و همچنین می توان زاویه ب را از میان برد یا اینکه مثلث اب د را مبدل کنیم مثلث
معادل ۱۰ د و از این قرار دو مثلث اضلاع ا ب د و ب م د متساوی می شود و مثلث معادل ۱۰ د
این قاعده کلی است و جمیع اشکال تعلق گیر و چونکه در هر عمل واحدی از عدد اضلاع کم شود
و عاقبت میرسیم به مثلثی که معادل ۱ باشد یا شکل مفروض

شرح - سابق ذکر شد که هر مثلث را می توان به مربع تحویل نمود و مسئله پس بعد از مسئله
ذکره جمیع اشکال مستقیمه یا خطوط را می توان به مربع تحویل کرد و چنین عمل را توجیع شکل گوئیم
و مسئله توجیع را اینجاست که مربعی بدست آوریم معادل با سطح دایره معلوم نقطه
مسئله حاضر

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که مساوی باشد با مجموع یا با تفاضل دو مربع معلوم



ا و ب دو ضلع دو مربع مفروض باشد

اولاً اگر بخوایم مربعی مساوی با مجموع این دو مربع رسم کنیم

دو خط ه د و ه ر را بر اوید قائمه رسم کنید و

ه د را مساوی ا ب کنید و ه ط را مساوی ب د

خط ط را وصل کنید این خط ضلع مربع مطلوب باشد

بنها مثلث ه د ط چون قائم الزاویه است مربع ه ط مساوی باشد دو مربع ه د و ه ط

ثانیاً اگر بخوایم مربعی مساوی با تفاضل دو مربع رسم کنیم باز بطریق مذکور زاویه قائمه ده

ترتیب دهید و ط ه را مساوی با اقصر دو ضلع ا و ب جدا کنید و از مرکز ط و شعاع ط

مساوی با ضلع دیگر ه د رسم کنید تا ه ر را بر نقطه ر قطع کند و مربع ه د مساوی شود

ب تفاضل دو مربع ا و ب زیرا که چون مثلث ه د ط قائم الزاویه است و وتر ط ه = ا

جدا شد و ضلع ه د = ب پس مربع ه د مساوی شود با فلان

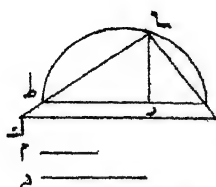
مقاله کسیر

۱۰۴

شرح - بطریق مذکور بتوان مرتبی ترتیب داد معادل با مجموع هر چند مربع که خواستیم زیرا که بعضی که دو مربع تحویل شود بیک سه مربع تحویل خواهد شد و مربع و آن دو یکی و بکدام که بخواهیم از مجموع چند مربع چند مربع دیگر موضوع کنیم

مسئله نهم

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که نسبتش به مربع مفروض اب و ه مثل م باشد

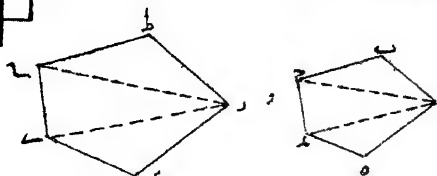


خطان بر خط غیر معین ه ط جزء و را مساوی کنیم و جزء و را بر نقطه ط نصف کنیم و رسم کنیم و از نقطه و عمود بر خط خارج کنیم و از نقطه دو وتر ه ط و را وصل کنیم و امتداد

دهید و از خط اول ک را مساوی ضلع اب مربع مفروض جدا کنید و از نقطه ک خط ل را بموازات ه رسم کنید پس ل ضلع مربع مطلوب است
بنها نظر بنوازی و دو خط ک و ط ه این تناسب حاصل شود $ل : ک = ط : ه = ک : ل$
و بعد از تربیع $ل : ک = ط : ه = ک : ل$ ولی در مثل قائم الزاویه ط و مربع ل ه نسبت به مربع ط مثل قطعه و راست بقطعه ط یا مثل م است
به ن پس $ل : ک = ط : ه = ک : ل$ ولی $ک = ل$ اب پس مربع ل ه نسبت به مربع اب مثل م است به ن

مسئله دهم

میخواهیم مربعی ط بنظر اب کثیر الضلعی مشابه اب و ه رسم کنیم
در کثیر الضلع مفروض دو قطر ا و ا را وصل میکنیم و بر نقطه و زاویه ط را مساوی با د رسم میکنیم و بر نقطه ط زاویه ط را مساوی اب و ه



مقاله

ع ۱

حاصل شد $ل : ک = ۲ : ۱$

و بعد از تقییس $ل : ل - ک = ۴ : ۳$

و نیز $ل : م = ۲ : ۱$

پس $ح : ۲ = ۲ : ۱$

مسئله سیزدهم

میخواهیم شکلی مشابه شکل مفروض دیگر رسم کنیم بر وجهی که نسبتش بسط مفروض

مثل عدد ۳ باشد بعد از

مساحت شکل مفروض را ل فرض میکنیم و یکی از اضلاعش را آ و مساحت شکل مطلوب

را م و آن ضلعش را که نظیر باشد ح

پس حکم مسئله $م : ل = ۳ : ۱$

و نظیرش باشد دو کل $م : ل = ۳۰ : ۱۰$

پس $ح : ۲ = ۳ : ۱$

بنابرین باید ضلع ح را بدستور مسئله معلوم کرد

مسئله چهاردهم

میخواهیم شکلی مشابه با شکل ل رسم کنیم بر وجهی که مساحتش معاد

باشد با شکل ل

یکی از اضلاع کثیر الاضلاع ل را آ فرض کنیم و ح را ضلع نظیرش از شکل مطلوب

م پس نظیرش باشد دو شکل $ل : م = ۲ : ۱$

و چون م باید بفرض با معادل شود با ک این تناسب حاصل شود

$ل : ک = ۲ : ۱$

پس اگر دو مربع طلب کنیم سه و ع که معادل باشند بال و ک این تناسب حاصل شود

$$\text{سه} : ۲ = ۲ : ۱$$

$$\text{سه} : ۱ = ۶ : ۲$$

پس

بنابر این خط مطلوب در جزو چهارم تناسب شود در خط سه و ع و ا

مسئله شانزدهم

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع مفروض در بر وجهی که مجموع دو ضلع بخاور
بطول خط اب باشد



بر قطر اب نصف دایره رسم
کنید و خط ه را موازی قطر

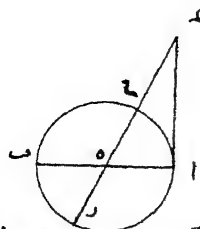
رسم کنید چنانچه فاصله ام مسا باشد با ضلع مربع مفروض در و از نقطه انجا که این خط را
قاطع میکند عموده را بر قطر فرود آورید پس ب و د دو ضلع مستطی مطلوب باشد
بر آنها مجموعشان مساویست با اب و مسطحشان از د ب مساویست با مربع ه و
و ه یعنی با مربع ام پس این مستطی معادل باشد با مربع مفروض

شرح - شرط امکان مسئله اینست که فاصله ام از شعاع تجاوز نکند یعنی ضلع مربع
اطول نباشد از نصف خط اب

مسئله شانزدهم

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع در بر وجهی که تفاضل دو ضلع مجاور
بطول اب باشد

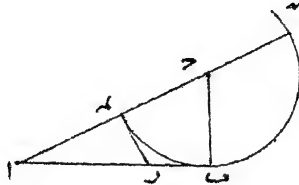
بر قطر اب دایره رسم کنید و بر طرف قطر مماس ام را مساوی با ضلع مربع در رسم کنید
و بر نقطه د و مرکز ه قاطع د را عمود دهید پس ع و د دو ضلع مجاور مستطی مطلوب



برها اولاً مثل این دو ضلع مساویت با قطر دارد
یا اب ثانیاً سطح \times عمود مساویت با \times عمود
و پس سطح معادل باشد با مربع مفروض
مسئله هفتم

میخواهیم خط اب را بر نسبت ذات وسط و طرفین قسّم کنیم یعنی بر دو جزء خالصه
بخش اعظم و اقله هندسی باشد ما باین تمام خط و جزء اصغر را

فرض میکنیم نقطه تقسیم خط باشد پس بنا بر فرض سنده
اب : اب = ار : رب



و ترکیب اب + ار : اب = ار + رب یا اب : ار
و بنا بر این (اب + ار) : اب = اب : ار

از این قرار دو خط اب + ار و ار (خط از مجهول مثلث است) تقاضی دارند یعنی طول اب
و سطح آن مساویت با اب پس طول آنرا میتوانیم به سبب سابقه معلوم کرد و آن $\sqrt{\frac{1}{2}}$ است
بر طرف ب از خط اب عمود ب را باندازه نصف اب اخراج کنید و از مرکز دایره
د ب دایره رسم کنید و خط ا د ه را وصل نمائید پس دو خط مطلوب با ه باشد و ا زیر آن
تقاضی شان $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = اب و علاوه بر آن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

اقرار این دو خط یعنی ا د قطعه ار باشد پس باید از مرکز ا و شعاع ا د قوسی رسم نمود
تا آن نقطه بر اب نقل شود

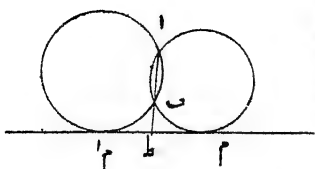
شرح فرض میکنیم اب = ط و ار = ا د = ا د - ا د = ا د - ا د

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$(1 - \sqrt{5}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sqrt{5} \times \frac{1}{2} = \text{ایس ار}$$

مسئلہ چھٹا

منخواص دایره و کسم کنیم و میگردانیم و نقطه اوب و عا ش شود با خط مفروض م

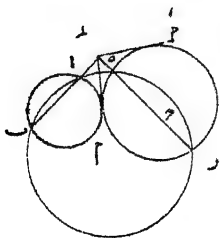


فرض میکنیم مثل حل شده و اب م دایره
مطلوب باشد پس اب را امتداد دهیم تا نقطه
ط و از سابق میدانیم که مس ط م واسطه نهنگ
است ما بین ط ا و ط ب

پس وضع نقطه م بانیقلم بدست آید که واسطه هندسی مین ط ا و ط ب معلوم کنیم و از
ابتدا نقطه ط بر خط مفروض نقل کنیم و چون نقطه م مشخص شد مرکز دایره بسوی م معلوم
فاصله ط م را در دو جهت می توان نقل نمود بنابر این مثل بطور کلی صاحب دو جواب

مسئلہ فنیہ

منیخا هم بر دو نقطه ا و ب ذایع مرودیم که تماس کند ذایع مفروضه
م م را



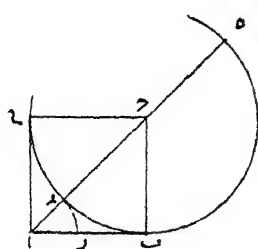
فرض میکنیم مسئله حل شده و ادب دایره
معلوم باشد و هماسی مرکز M را رسم میکنیم
و امتداد میسیم تا قاطع AB را برسد قطع کند و از
قاطعی که در AD و AD دایره H رسم میکنیم (حاصل)

مسلم

میخواهم مقیاس مشترک در صورت امکان مابین قطر و ضلع مربع مشخص کنیم
 شکل ۱۱ مربع مفروض است و AD قطر شال و B را چند مرتبه ممکن باشد

مقاله کتیم

۱۱۰



برای نقل میکنیم و لهذا از مرکز د و شعاع د ب
نصف دایره مد ب را رسم میکنیم و معلوم میشود
که د ب یکمرتبه در د ا بکنج و قبش ا ب باشد
پس نتیجه عمل اول این شد خارج قسمت ا و باقی ا
و حال باید از اسنجید ب د را مساوی ا ب

پس میتوان ا د را مساوی ا د ج نمود و از ا ب نقل کرد و معلوم کرد که دو مرتبه در ا و
بکنج و قبش خری باشد ولی چون این باقی ماند نامتد رجادی بناقص است و طول نیست که
بصری که پیدا میکنیم از دست بروند و این راه واسطه زدن ناقص باشد در تعیین مطلوب و از
انروی توان حکم صریح کرد در هر یک که آن دو خط ا د و د ب را مقیاس مشترک هست یا نه
و وسیله آسانی در دست هست که عمل را بملوط متنافه نکشاند و بهواره در خطوطی باشد که
طولشان بقرا با قیت تقضیلش اغیت

چون ا و ب د قائمه است ا ب مماس دایره شود و ا ه قاطع باشد که از همان نقطه د
دایره رسم شده پس ا د : ا ب = ا ب : ا ه و از اینقرار در عمل ثانی که مقصود مقایسه ا د
ا ب است میتوان عوض نسبت ا د : ا ب نسبت ا ب : ا ه را اختیار نمود و ا ب یا
مساویش ه د دو مرتبه در ا ه بکنج و قبش ا د باشد پس نتیجه عمل ثانی خارج قسمت ۲ است
و باقی ا د که باید به ا ب سنجید

عمل ثالث چون منجر شد بمقایسه ا د و ا ب پس بنا بر آنچه ذکر شد باز متدل شود بمقایسه
یا مساویش ه د نسبت به ا ه و از اینقرار خارج قسمت ۲ باشد و باقی ا د

پس معلوم شد که این عمل را حد و انتهائی نباشد و از اینقرار مقیاس مشترکی مابین قطر و ضلع
مربع بدست نیاید و بطلب در علم حساب مبتین شده بود چه کمترین دو خط بر نسبت ۲ : ۳ باشد

م = ۲ + ۱ + ۲ = ۱ + ۲ + ۱ و بعد م = $\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2+1}$ و این مقدار
و این مقدار م بعینه همانست که برای م سابق ثبت کرده بود پس معلوم میشود که
این کسر مسلسل شود

$$1 + 2 = 1 + 2$$

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+1}$$

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+1} \text{ الی غیره}$$

و من باب مثال فرض میکنیم ۲ را اولان باین صورت نوشته شود $\frac{1}{1+1}$ =

$$= \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+1} = 1 \text{ پس باین کسر مسلسل تحویل شود}$$

$$\frac{1}{1+2} + 1 = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+1} + \frac{1}{1+2+1+1}$$

الی غیره

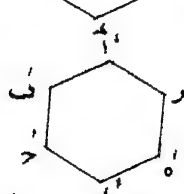
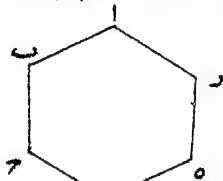
در خواص اشکال ذو کثیره الاضلاع منتظمه و مساحت دایره

حدود

هر کثیر الاضلاعی که متساوی الزوایا باشد و هم متساوی الاضلاع آنرا منتظمه
کثیر الاضلاع منتظمه انواع دارد و اضلاعش بهر شمار میرسد مثلث متساوی الاضلاع
منتظمه است که دارای سه ضلع باشد و مربع آنکه دارای چهار

قضیه اول

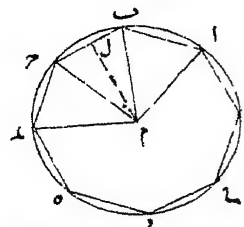
هر کثیر الاضلاع منتظمه که دارای یک ضلع باشد متشابه اند



دو مستثنی اختیار میکنیم مثل ا ب ح د ه ر و ا ب د و ه ر
مجموعه زوایا در هر دو یکی است و مقدارش هشت قائمه
زوایا یا سدس این مجموع باشد و همچنین زاویه ا پس ب
و زوایای متساوی باشند و بکنند و زوایای ب و د و د و ه
و عداوه بر آن نظر بقرین این نوع اشکال اضلاع ا ب
ب ح و د و غیره متساوی باشند و همین صیقل ا ب

ب ا د و ح و غیره پس این تناسب حاصل شود ا ب : ب ح : ح د : د ه : ه ر : ر ا
و غیره پس در شکل مذکور زوایای متساوی شد و اضلاعشان متساوی و بنابراین متشابه شدند
نتیجه هر دو کثیر الاضلاع منتظمه که یک عدد اضلاع باشد و دو محیطشان بر نسبت
ضلع متساوی باشد و دو سطحشان بر نسبت دو مربع اند و ضلع
مشرع - زاویه کثیر الاضلاع منتظمه از روی عدد اضلاعش بدست آید مثل زاویه کثیر الا
متساوی الزوایا

قضیه دوم



کثیر الاضلاع منتظم را میتوان در دایره محاط نمود و نیز بر دایره محیط

اب ۶۷۰۰۰ کثیر الاضلاع مفرد وضع باشد و دایره

بر سه نقطه ا و ب و د مرور نماید و مرکز آن نقطه م باشد

و م ل عمود وارد بر وسط ضلع ب ح و دو خط ا م

و م د را وصل کنید حال کوئیم دو ذوا ربعه اضلاع

م ل ح و م ل ب را میتوان بر یکدیگر منطبق نمود زیرا که ضلع م ل در هر دو مشترک است

و زاویه م ل ح = م ل ب چونکه هر دو قائمه اند پس ضلع ل ح منطبق شود بمساوی خود

ل ب و نقطه ح بر ب و نظر بقریف کثیر الاضلاع زاویه ل ح د = ل ب ا پس

واقع شود بر استقامت ب ا و چون ح د = ب ا نقطه د واقع شود بر ا و دو ذوا ربعه

اضلاع بر یکدیگر منطبق شوند پس فاصله م د مساوی باشد با م ا و بنا بر این دایره

ماره بر سه نقطه ا و ب و د بر نقطه م نیز گذرد و همین دلیل ثابت میکنم که دایره ماره

بر سه نقطه ب و د و د مرور کند بر بخش م بعده و بگذارد باقی پس نماید دایره که بر سه نقطه ا و

و د گذشته مرور کند بر سایر بخش کثیر الاضلاع و بنا بر این شکل محاط شود در دایره

ناتینا نسبت باین دایره جمیع اضلاع اب و ب ح و ح د و د ا و ا ب مساوی اند پس

بعد باشند از مرکز م و پس اگر از مرکز م و شعاع م ل دایره رسم کنیم پس دایره تمام کند

ضلع ب ح و سایر اضلاع کثیر الاضلاع را و هر کدام را در نقطه وسط و دایره محاط شود

در کثیر الاضلاع یا آنکه کثیر الاضلاع محیط شود بر دایره

متشکل اول - نقطه م مرکز مشترک دایره محیطه و دایره محیطه نمیتوان مرکز کثیر الاضلاع

گفت و باین طریق زاویه ا م ب حاده مابین دو شعاعی که بطرفین ضلع اب وصل شوند و

مرکز کنیم کوئیم چون شعاع ا و تار اب و ب ح و غیره متساوینند ظاهر است که جمیع زوایا

مرکز نیز نتوانند و بنا بر این مقدار هر کدام با نیوج حاصل شود که چهار قاعده را قسمت کنیم

بر عدد اضلاع کثیر الاضلاع

شرح ۲- چون نجویم در دایره مفروضه کثیر الاضلاع مستطیل صاحب چنان ضلع باشد

محاط کنیم هیچ لازم نیست جز آنکه محیط را بعد و اضلاع کثیر الاضلاع را بر اجزای مساوی

قسمت کنیم زیرا که چون قبی مساوی شد اوتار اب و ب و د و د و غیره مساوی گردید

(شکل ۲) و مثلثات اب م و ب م و د و د و م و غیره نیز متساوی شوند چنانکه

متساوی الاضلاعند نسبت یکدیگر پس جمیع زوایای اب و ب و د و د و م و غیره

متساوی گردند و شکل اب د م ... کثیر الاضلاع مستطیل باشد

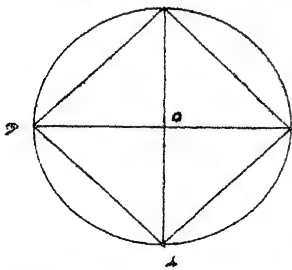
شرح ۳- چون در قوس دایره اوتار متساویه محاط کنیم سبکی را که صورت می بندد

قطعه کثیر الاضلاع قطع می گردیم چنانکه قطعه دارا باشد خواص صلیبه اشکال کثیر الاضلاع قطع

چونکه زوایایش متساوی اند و هم محاط شود در دایره و هم محیط شود بر آن ولی هیچ کثیر الاضلاع

مستطیل مخصوصی متعلق باشد جز آنوقت که قوس موثر یکی از اضلاعش صی صی باشد

از تمام محیط



قضیه سی و یک

میخواهم در دایره مفروضه هر یکی محاط کنیم

دو قطر اب و ب را بر هم می کشید و اطراف

اب و د و د و ب را ب خطوط وصل کنید و شکل اب د د

مربع محاطی باشد چونکه زوایای اب و ب و د و د و غیره مساوی باشند و اوتار اب

و ب و د و غیره نیز متساوی

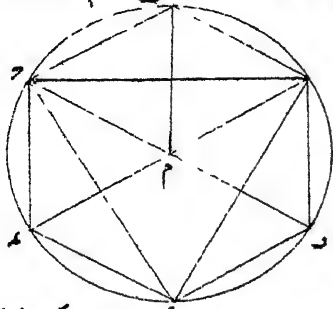
و ۱۱۵

شرح مثلث ب د چون قائم الزاویه است و مساوی الساقین این شایسته حاصل شود

ب ج د = ۰ = ۴۷ : ۱ پس ضلع بیج می ط نسبت بشعاع مثل خذر ۲ است ب واحد

فصل پنجم مسئله

منخواهیم در ذاین مفروضه شکل مثلث متساوی الاضلاع
محاط کنیم



فرض میکنیم مسکه ر ا حل شده و اب ضلع مسد
می ط باشد و شعاع ام و م ب را وصل
میکنیم و میگوئیم مثلث ام ب متساوی الاضلاع
بر نهارا زویه ام ب سدس چهار قائمه است

و چون قائمه زاویه فرض کنیم ام ب = $\frac{۲}{۳}$ = $\frac{۳}{۲}$ و مجموع دو زاویه دیگر
م و ب ام همان مثلث این میشود ۲ - $\frac{۲}{۳}$ = $\frac{۴}{۳}$ و چون اندو زاویه برابرند مقدار هر
کدام $\frac{۲}{۳}$ باشد پس مثلث اب م متساوی الاضلاع باشد و ضلع مسد می ط
مساوی شود با شعاع دایره

و بنا بر این چون خواهیم در دایره مدسی محاط کنیم باید شعاعش را شش مرتبه بر خط
نقل نمود و لابد نقطه انتها بر مبدأ واقع شود

و چون مسد اب ج د در محاط شود و ر و س و ی و ایش را بتجلی وصل کنیم
متساوی الاضلاع اده بدست آید

شرح - شکل اب د م مقین است یعنی اضلاعش هم تنوازی باشد و هم متساوی چونکه
اب = ب د = د م = ۱ ام پس و ه مجموع دو مربع دو قطر ا د + ب م مساوی
باشد با مجموع مربعات اضلاع که ۱۰۴ اب باشد یا عم ب م و چون از طرفین ب م
را موضوع کنیم باقی ا د = ۰۳ ب م پس ضلع مثلث متساوی الاضلاع

نسبت شعاع مثل جذر ۳ است بواحد

قضیه ۵ مسئله

میخواهیم در دایره مفروضه شکل معشری عماد کنیم

فرض میکنم مسئله را حل شده و اب ضلع معشر عماد

باشد و زاویه مرکزیم $b = \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{3}$ بر مجموع

دو زاویه m ب a و m اب مساویت با $2 - \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}$ و بنابراین مقدار هر یک m $\frac{3}{4}$ باشد

حال بخواهیم زاویه m ب a را نصف کنیم

و مثلث n م ب مساوی است با m و زاویه n م ب 2 و m هر یک m

$\frac{3}{4}$ قائمه باشد و $m = n$ و مثلث b ا ن نیز مساوی است با m زیرا

زاویه n ب a چون $\frac{1}{2}$ قائم است و زاویه b ا ن مساوی است با $\frac{1}{2}$ زاویه m

n ب a می شود

بنابراین $a = b = n = m$

و بالاخره $a : b : m = 1 : 1 : 1$

یا $a : m : n = 1 : 1 : 1$

پس معلوم شد که شعاع a م بر نقطه n بر نسبت ذات وسط طریفین قسمت شده و جزء اعظم

m ن ضلع معشر عماد است

بقیه ضلع معشر عماد در دایره که شعاعش n فرض شود نیست و اگر

$$n = \frac{(1 - \frac{1}{2})}{2}$$

نتیجه اول - چون رأس معشر را بتجلی وصل کنیم محض 2 است آید

مقاطع شوند و کثیر الاضلاع منتظم محیطی ۲ ط ۱ له... ترکیب شود مشابه کثیر الاضلاع محیطی

میرزا این مفره همان معلوم شود که سه نقطه م و ب و ط بر استقامت خطی واقع اند

زیرا که دو مثلث قائم الزاویه م ط و م ط ف مشار کنند در وتر م ط و ضلع م م = م ف

پس مساوی باشد و ۱۹ و ۱۰ و زاویه م ط = ط م ف بنا بر این خط م ط هر دو رکن بر نقطه ب از

وسط قوس م ف و بهمین خط ظاهر می شود که نقطه ب واقع است بر استقامت م م و کند

و چون ۲ ط موازیه تب ا ب و ط ۱ باب در زاویه ۲ ط ۱ = اب در و همچنین زاویه

ط ۱ = ک = ب ج م و بکنایه از وایای کثیر الاضلاع محیطی مساوی باشد باز وایای محیطی

و علاوه بر آن خط بر توازی همین خط ط ۱ : اب = م ط : ب و ط ۱ : ب ج = م ط : ج

پس ۲ ط : اب = ط ۱ : ب ج و لی اب = ب ج پس ۲ ط = ط ۱ و بهمین دلیل

ط ۱ = ۲ ط ۱ و بکنایه این ضلع کثیر الاضلاع محیطی مساوی باشد پس این کثیر الاضلاع

منتظم باشد و مشابه کثیر الاضلاع محیطی

فصل پنجم - بعکس مذکور اگر کثیر الاضلاع محیطی ۲ ط ۱ له... مفروض باشد و بخواهیم

از روی کثیر الاضلاع محیطی اب ج... را رسم کنیم بهمین عمل کافیت که بر روی م و ط

و ب و غیره کثیر الاضلاع مفروض خطوط م ۲ و م ط و... را رسم کنیم و آنها را

بر نقاط ا و ب و ج و غیره قطع کنند و ما بین ا با و ب با و ج با و د با و غیره وصل کنیم

تا از ترکیب آنها کثیر الاضلاع محیطی بدست آید و در همین حالت نیز میتوان مختصرا این

نقاط ماس م ف و... را با و تا ج ف و ف و ج و غیره وصل نمود تا باز کثیر

الاضلاع منتظم مشابه محیطی بدست آید

فصل ششم - پس میتوان بر رویه مفروضه محیطی و مجموع کمال منظم را که بتوانیم محاط کنیم

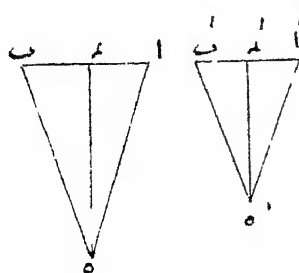
قضیه هفتم

مساحت کثیرالاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایره محاطیه

برهان در شکل سابق کثیرالاضلاع مفروض ۲ ط - ک ... بهت و مساحت مثلث
 $2 ط = 2 ط \times \frac{1}{2} م$ و مساحت مثلث ط م = $ط \times \frac{1}{2} م$ ف ولی ف
 $= 2 م$ پس مساحت مجموع دو مثلث = $(ط + ط) \times \frac{1}{2} م$ و چون همین
 وجه در سایر مثلثات پیش ویم معلوم میشود که مساحت مجموع آنها یعنی مساحت کثیرالاضلاع
 تمام = مجموع قواعد ط + ط + ... که محیط شکل باشد ضرب در $\frac{1}{2} م$ که نصف
 شعاع دایره محاطیه باشد

مشرح - شعاع دایره محاطیه یعنی ح ع بعینه عودیت که از مرکز یکی از اضلاع خارج
 شود و آنرا گاه ارتفاع کثیرالاضلاع نیز گویند
 قضیه هشتم

دو کثیرالاضلاع منتظم که عدد اضلاعشان برابر باشد محیطشان بر
 نسبت دو شعاع دو دایره محیطه است نیز نسبت دو شعاع دو دایره
 محاطیه و سطوحشان بر نسبت مربعات همان شعاع است

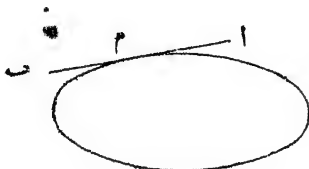


برهان اب ضلع یکی از اضلاع کثیرالاضلاع
 و ه مرکزش و بنا بر این ا شعاع دایره محیطه
 اش و ه عمود بر اب شعاع دایره محاطیه
 و بکذا اب ضلع کثیرالاضلاع دیگر که مشابه او
 و ه مرکزش و ا شعاع دایره محیطه و

و ه شعاع دایره محاطیه اش محیط دو کثیرالاضلاع بر نسبت و ضلع اب و اب است

و دوزاویه او ا چون هر کدام نصف زاویه کثیر المضلع است متساوی باشند و چون
 دوزاویه ب و ب پس دو مثلث اب ه و اب ه متشابه باشند و همچنین و مثلث
 قائم الزاویه اده و اده پس اب : اب = اه : اه = ده : ده پس محیط دو کثیر
 المضلع متناسب باشند بر نسبت دو شعاع اه و اه از دو دایره محیطه و نیز بر نسبت
 دو شعاع ده و ده از دو دایره محیطه

و چون سطح دو کثیر المضلع بر نسبت مربع دو ضلع متناظر اب و اب اند پس متشابه
 باشند بر نسبت مربع دو شعاع اه و اه از دو دایره محیطه و بر نسبت مربع دو
 ده و ده از دو دایره محیطه



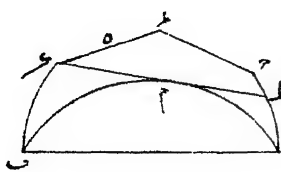
درست که دایره

تعریف

خط منحنی محب است که چون بر هر نقطه اش
 خطی مماس کشید تمام منحنی در یک سمت خط افتد
 خط منحنی محب را چون خطی قطع کند فصل کشند
 از دو نقطه بیشتر نباشد پس اگر خط م ن

منحنی را بر سه نقطه اوب و و قطع کند ظاهر است که چون مماسی بر یکی از نقاط مابین
 ب رسم کنیم قطعه از منحنی بیک سمتش افتد و قطعه بسمت دیگر
 و محیط دایره خط منحنی است محب

قضیه هفتم



خط محب ا م ب اصغر از هر خطی که بر آن مماس
 نباشد یا اگر مماس نباشد باشد بقطعه ا ب

مقاله چهارم

۱۳۲

بویها اگر گویند α نیست اقصای مجموع خطوط محیطی این میان این خطوط باید خطی پیدا شود
اقصای باقی که کوچکتر باشد از α ب یا منتهایش برابر آن باشد
چنین خط را α فرض میکنیم و بر نقطه از خط α ب که غیر مشترک باشد در دو
خط مثل α مماس α که را رسم میکنیم این خط مندرج شود باین دو خط α ب و
 α ب چونکه اولی محدب است و خط α که اقصای از α ب α ب است چون
بجای قطع α ب α ب خطی تقسیم α که را قرار دهیم خط محیطی α ب اقصای شود از α
 α ب و حال آنکه بفرض α خط اقصای اقصای از α باقی پس فرض ماطل است و مجموع خطوط
محیطی طولند از خط α ب



و بهین جهت ثابت کنیم که خط محدب α ب
 α ب اقصای از α ب خط α ب از طرف بر آن خط
منوره باشد

قبل از ذکر اصول محبت حد و دکه در مساحت اشکال منحنیه بآیند شرح معانی بعضی
اصطلاحات مستعمله بیاید نیست
مقدار تغییراتی است که حالات و اوضاع مختلفه کمیت متدرجاً بآن تعلّق گیرد
حد عبارت از مقدار ثابت است که مقدار تغییر پذیر تا هر مقام نتواند بآن نزدیک شود
ولی نتواند بآن برسد

در علم حساب هندسه امثلّه عدیده است از مقادیر تغییر پذیر و از حد و دکه بمنتهای
از مقادیر میل میکند

مثلاً میدانیم که مقدار زاویه کثیر الاضلاع منقطع که صاحب ضلع α نیست $\frac{4-42}{6} = \frac{4}{6}$
و چون فرض کنیم عدد اضلاع متدرجاً ترقی کند تا مالاً نهایت معلومت که مقدار زاویه

هند کسر

ترقی کند و آنوقت که را بی اندازه بزرگ فرض کنیم کسر $\frac{1}{2}$ کوچکتر شود از هر مقدار منفرد
و معلوم شود که مقدار تقریباً لیه را رویه کثیر الاصلع شطحه حدش دو قاعده است
و همچنین اگر اب را بر دو نصف کنیم و ب را بر $\frac{1}{2}$ و بکنند

۱ ————— ۲ ————— ۳ ————— ۴ ————— ۵ ————— ۶ ————— ۷ ————— ۸ ————— ۹ ————— ۱۰ —————

آنوقت می بینیم که خطوط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ حد مقدارشان اب است
و از اینگونه امثال بشمار میتوان آورد

ولی باید اینقدره را پسند داشت که ممکن است مقدری تغییر کند و حدی نداشته باشد
مثلاً مجموع ۱ جمله اول ثابت مندی با افزایش مقدار ۱ تغییر پیدا می بخیزد و واحدی نباشد
جز در این صورت که تناسب ناقص نباشد ولی اگر مثلاً ۱ باشد مجموع الی غیر نهایت است
قضیه کسر هـ

هرگاه دو مقدار تغییر پذیر و در ضمن تغییر تقریباً حدشان پیوسته
متناوب باشند و حدشان ۱ و ۲ نیز متناوبیند

برها فرض میکنیم دو تغییر پذیر و در تحت حد خود بمانند و تجاوز نکنند و این دو
را قرار میدسیم $۱ = ۲ + ۱$ و $۲ = ۱ + ۱$

(و ب و ه ممکن است کوچکتر از هر مقدار فرض شوند)

و چون تساوی ویم را از اول تفریق کنیم این تساوی حاصل میشود $۱ = ۲ - ۱$ و $۲ = ۱ - ۱$
 $۰ = ۱ - ۱$ (چونکه بنا بر فرض $۱ = ۲$)

حال اگر ما بین ۱ و ۲ تساوی مثل ل فرض کنیم این تساوی حاصل شود $۱ = ۲ - ۱$
و اینحال است چونکه ب و ه و بنا بر این تفاضلشان از هر مقدار منفرد و کوچکتر شود
و اگر دو تغییر پذیر در تقریب خود متناقص میشدند نیز باید دلیل مانند مذکور بود

مقاله چهارم

قضیه فیثاغورس

هرگاه دو مساوی ۷ و ۸ حاصل ضرب بهشت حد خود ۲ و ۱ کنند
خود حاصل ضرب ۷ × ۸ حدش ۲ × ۲ باشد
برها این دو تساوی را قرار می‌دهیم ۲ = ۷ + ۸ و ۲ = ۸ + ۷
و آنها را در هم ضرب می‌کنیم چنین شود

$$۲ \times ۲ = ۷ \times ۸ + ۸ \times ۷ + ۷ \times ۷$$

و چون هر قدر ۷ و ۸ بشت حد خود میل کنند دو مقدار ۷ و ۸ به نیت شل می‌کنند
سه جبهه ۷ و ۸ و ۷ بی اندازه کوچک شود پس مجموعشان نیز هر چند بخواهیم کوچک
تواند شد پس مقدار ۸ هر چند بخواهیم تواند نزدیک شد به ۲

و چون حکم در حاصل ضرب دو هاله بر شل به نیت می‌توان از آن چند عامل جاری ساخت
پس نتیجه حد خارج قسمت دو تغییر پذیر ۷ و ۸ مساویست با خارج قسمت دو حدشان

قضیه فیثاغورس

اولاً محیط دایره حد قسمت مشترک که به منش میل می‌کند دو محیط دو کثیر الاضلاع
منتظم متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کنند
ثانیاً مساحت دایره حد قسمت که به منش میل می‌کند مطوج همان اشکال

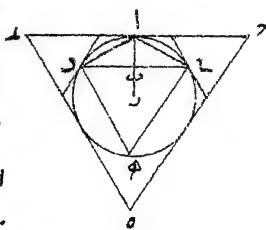
اولاً فرض می‌کنیم ۲ و ۳ کثیر الاضلاع شطرنجی

و ۴ و ۵ کثیر الاضلاع منتظم محیطی و طول محیط دایره

مندرج است باین دو محیط این دو کثیر الاضلاع و عدد

اضلاعشان متصل ضاعف کنیم از زوای خود کثیر

ظاهر می‌شود که محیط کثیر الاضلاع محاطی بر وی نزدیک می‌شود



و محیط کثیر الاضلاع محیطی روی بت ناقص گذارد

س این و محیط همواره بدایره نزدیکتر شوند هر چند حد و اضلاع بیشتر مضاعف شود و اگر همین قدر ثابت کنیم تفاضل با بین آنها ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود مگر این شود که آن محیط هر چند بخواهیم بدایره توانمند نزدیکتر شد فرض میکنیم م و محیط دو کثیر الاضلاع ۷۵۰۰۰ و ۷۵۰۰۰ ده باشد پس ۷۵۰۰۰ م = ر : ر ب و بتفصیل نسبت م - م = م = ر - ر ب یا ب ا : را

و بنا بر این م - م = $\frac{۷۵۰۰۰}{۱۰۰}$ ب ا

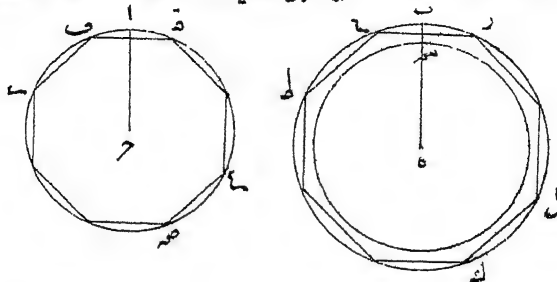
و چون با اقصاست از ۱۰۰ و ۱۰۰ اقصاست از هشتاد و شش موثرش و قریباً موثر بی اندازه کوچک شود از آنجمله که در سلسله تناسب بر نسبت $\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$ و $\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$ و شرک کنند و م نیز روی بتبرزل است و را مقدارش ثابت پس نسبت اینها اینها در صورتی که کوچکتر میشوند که م - م بی اندازه بهجت صغر نزدیک و $\frac{۱۰۰}{۱۰۰}$ ثانیاً فرض میکنیم م و س مساحت بهمانند و کثیر الاضلاع با و مانند مذکور ثابت میکنیم که چون تعدد اضلاع آنها روی ترقی کنند و س بی اندازه بسط و ایر و نزدیک شوند و مگر این شود که حد آن دو سطح دایره است همین قدر که بنماییم م - س ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود پس گوئیم بنابر این

م - س = ر : ر ب و بتفصیل نسبت م - س = م = ر - ر ب یا ب ا : را
ب د : ر ا و بنا بر این م - س = $\frac{۷۵۰۰۰}{۱۰۰}$ ب ا

و ظاهر است که این تفاضل بی اندازه مائل است به صغر زیرا که چون عدد اضلاع مضاعف شود و روی بت ناقص نهند و ب د که اقصاست از ۱۰۰ ممکن است بی اندازه کوچک شود و را ثابت است فهو المطلوب

بنابر خدای تعالی اشکال کثیر الاضلاع متساوی الساقین و محیطیه شعاع دایره است
قصیده سیزدهم

اولاً - نسبت محیط دایره بیکدیگر مثل طول اشعه آنها باشد
ثانیاً - نسبت سطوح دایره بیکدیگر مثل مربعات همان اشعه باشد



اولاً - می‌توانیم در دو دایره که شعاع ه ب و د ا اند دو کثیر الاضلاع منظم بنماییم
و م و محیط آنها باشد و ه و ن دو شعاع ه ب و د ا و د و د

دو محیط دایره پس و ا
حال چون هر دو ضلع دو کثیر الاضلاع می‌طری را بی اندازه تضعیف کنیم و محیط م و
بی اندازه نزدیک شوند به د و د و بنا بر این در خارج قسمت $\frac{د}{ه} = \frac{د}{ن}$ و $\frac{م}{ه} = \frac{م}{ن}$ میل کنند نسبت
دو ه $\frac{د}{ه}$ و $\frac{م}{ه}$ و ا و چون از تساوی دو تغییر پذیرتساوی در حدشان لازم آید

و ه پس $\frac{د}{ه} = \frac{م}{ه}$ (۱)
ثانیاً - سطح دو دایره را د و ه فرض میکنیم و مساحت دو کثیر الاضلاع منظم بنماییم

محیطیه را م و م پس و ا $\frac{م}{ه} = \frac{م}{ن}$
و چون حد و مقدار $\frac{م}{ه}$ و $\frac{م}{ن}$ این دو مقدار است $\frac{د}{ه} = \frac{د}{ن}$ پس و ا

$$(۲) \quad \frac{۲}{۲۵} = \frac{۲}{۲۵}$$

مشق - از تساوی (۱) این تساوی استنباط شود

$$(۳) \quad \frac{۲}{۲۵} = \frac{۲}{۲۵}$$

یعنی که نسبت محیط هر دایره بقدریست درجمع دو ایر ثابت و این نسبت را ما در حساب و رقانون صریحاً بیان نموده ایم (و ان سه حرف اول کلمات نسبت و محیط و قطر است) و در جمع ممالک هندسین آنرا باین علامت π بنمایند و آخر یونانی است و پی تلفظ شود پس نظر باختصار صورتش باینترتبهست π و در این کتاب بهین علامت π بنمایم و مقدار این نسبت اصم است و تقریب استخراج شود و ان بکسر چهار تا و اعشاریست

$$\pi = ۳۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۰۰۰۰$$

و دستور استخراج این عدد و تقریبی را عن قرب بوجبی مختصر بیان میکنیم حاصل حال چون در تساوی (۳) بجای $\frac{۲}{۲۵}$ معادلش π را قرار دهیم این تساوی می شود $\frac{\pi}{۲۵} = \pi$ و بعد $\pi = ۲۵\pi$ (۴) یعنی محیط هر دایره مساویست بمضای π ضرب در شعاع

تعریف - دو قوس متشابه اب و د بر نسبت دو شعاع γ و δ باشند
ثانیاً دو قطاع متشابه ب و د و بر نسبت دو وتر γ و δ همانند و شعاع باشند

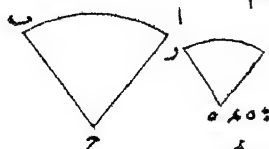
اولاً بنا بر و γ قوس ب ا: محیط γ = δ : γ

و همچنین قوس δ : محیط δ = γ : δ

و نظر بتساوی دوزاویه γ و δ این تناسب حاصل شود

قوس ب ا: قوس δ = محیط γ : محیط δ = γ : δ

ثانیاً بنا بر همان و γ قطاع ا ب: دایره γ = δ : γ



مقاله هفتم

۱۲۸

قطاع دایره: دایره $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

و بنا بر این قطاع احرب: قطاع دایره $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

قضیه نهم

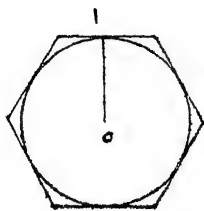
مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع
بر دایره ۱۰ کثیر الاضلاع منظمی محیط میگیریم و فرض میکنیم $\frac{1}{2}$ محیط این کثیر الاضلاع باشد

و سه سطحش و نه شعاع ۱۰ باشد پس $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

و چون عدد اضلاع کثیر الاضلاع محیط را بی اندازه تضعیف

کنیم حاصل ضرب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ بی اندازه نزدیک شود

به محیط $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ و حد سه سطح دایره بدست آید



دایره $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ و سابق ذکر شد که محیط $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ پس بعد از تبدیل

مساحت دایره $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال فرض میکنیم $\frac{1}{2}$ مقدار $\frac{1}{2}$ را بتقریب $\frac{1}{2}$ فرض میکنیم پس

مساحت دایره $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

نتیجه مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول تنش در نصف شعاع

بر مثال نسبت قطاع احرب تمام دایره مثل

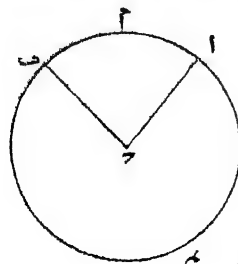
فوس ام ب است تمام محیط اب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

یا مثل ام ب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ احرب است به اب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

و مساحت تمام دایره نسبت اب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

پس مساحت قطاع احرب این باشد ام ب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

مثال فرض میکنیم شعاع $\frac{1}{2}$ و فوس ام ب مقدارش $\frac{1}{2}$ پس طول این



این قوس از روی این ثابت است آید قوس α ب: $\pi ۲ = ۶۰ : ۳۶۰$

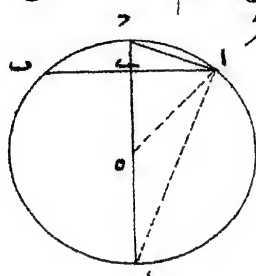
$$\text{و بنا بر این قوس } \alpha \text{ ب} = \frac{۶۰ \times \pi ۲}{۳۶۰} = \frac{۵ \cdot \pi}{۳} = \frac{۱۲ \cdot \pi}{۴} = \pi ۴$$

پس ضلع α ب = $\pi ۴ = ۶ \times \pi ۲ = \pi ۲۴ = ۳۹۰۰$ ذراع مربع

در مسائل متعلقه با شکل کثیر الاضلاع منتظمه استخراج نسبت محیط بقطر

قضیه چهارم مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع منتظم محاطی و شعاع دایره



در پنج اهرم معلوم کنیم ضلع کثیر الاضلاع منتظمه

محاطی دیگر را که عدد اضلاعش ضاعف کثیر

الاضلاع مفروض باشد

فرض میکنیم α ب = ۷ و $د = ۱$ و $ه = ۲$

و در خط α و $ه$ را وصل میکنیم آنگاه در مثلث

قائم الزاویه α ه این توی حاصل شود α د = $۷ \times ۲ = ۱۴$ یا α ب = $۲ \times ۷ = ۱۴$

و چون $۷ - ۵ = ۲$ و $۵ - ۳ = ۲$

و در مثلث قائم الزاویه α ه این توی حاصل شود α ه = $\sqrt{۷^2 - ۲^2} = \sqrt{۴۹ - ۴} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$

پس $۷ - ۵ = ۲$ و $۵ - ۳ = ۲$

و بنا بر این α ب = ۱۴ و α د = ۱۴ و α ه = $۳\sqrt{۵}$

و بالعکس اگر α ط معلوم باشد بتوان α را استخراج نمود و در این صورت باید دستور

(۱) را نسبت به α حل نمود آخر این دستور حاصل میشود

$$(۲) \quad \frac{۲ \cdot \alpha \cdot (۲ - \alpha^2)}{۳} = ۲$$

مثال دستور (۱) فرض میکنیم α ضلع مستقیم باشد و بنا بر این α د = ۷ و α ه = ۲

مقاله چهارم

طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی چنین میشود

$$ط = ۲۷ \cdot د = (۲۷ - ۱) \cdot ۲۷ = (۲۷ - ۱) \cdot ۲۷ = ۲۷ \cdot ۲۶ = ۷۰۲$$

مثال دستور (۲) فرض میکنیم ط ضلع معشر باشد و میخواهیم ضلع مخمس را معلوم کنیم

$$\text{و از سابق میدانیم که } ط = د \cdot (۱ - ۵\sqrt{۲}) \text{ پس}$$

$$\frac{۲}{۴} = \frac{(۵\sqrt{۲} - ۱) \cdot ۲}{(۵\sqrt{۲} - ۱) \cdot ۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۲}{۴}$$

$$\text{و بنا بر این } \frac{۲}{۴} = \frac{۲}{۴}$$

بقیه - چون مربع شعاع را بر مربع ضلع معشر بقیایم این مجسوع

$$\frac{(۵\sqrt{۲} - ۱) \cdot ۲}{۴} + ۲$$

مساوی شود با $\frac{۲}{۴} \cdot (۵\sqrt{۲} - ۱) \cdot ۲$ که مربع ضلع مخمس باشد پس

ضلع مخمس محاطی و مثلث قائم الزاویه باشد که یکی از دو ضلع زاویه قائمه اش شعاع دایره باشد و ضلع دیگرش ضلع معشر

قضیه امسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع متبسطی شعاع دایره

محیطیاش میخواهیم استخراج کنیم ضلع کثیر الاضلاع محیطی متساویاتر را

فرض میکنیم $ا = ۲$ و $د = ۱$

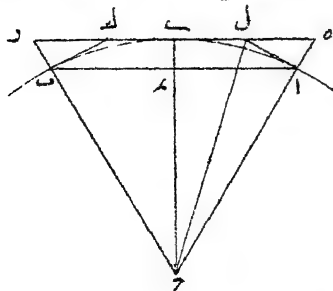
$$و ه = ر = م$$

و بشا به دو مثلث ه در و ا د ب

$$ا : د = ا : ب = ۱ : ۲$$

$$\text{و نیز } د : ا = د : ب = ۱ : ۲$$

پس نظر به نسبت که $ا : د = ا : ب = ۱ : ۲$ یا $د : ا = د : ب = ۱ : ۲$ (۱)



و در مثلث قائم الزاویه اء این تساوی حاصل شود $دء = \sqrt{۴۱ - ۴} = \sqrt{۳۷}$ و $\frac{۲}{۴} = \frac{۲}{۴}$

پس $۲ : ۴ = د : ۴$ و $\sqrt{۳۷} : ۴ = ۲ : ۴$ و بنا بر این $۲ = \sqrt{۳۷}$

قضیه ۱۸ مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع اب از کثیر الاضلاع منتظمی که دارا
ع ضلع باشد و شعاع د ا د این محیطه منخواهیم مساحت آن کثیر الاضلاع
را استخراج کنیم

فرض میکنیم در شکل سابق اب = ۲ و د = ۱ و مساحت شکل باشد

$$\text{پس مس} = ۲ \times \frac{۲}{۲} = ۲ \text{ و } دء = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲}$$

$$\text{پس مس} = \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲$$

مثال مطلوب است مساحت مسقطی نقطه و د = ۴ و ع = ۳

$$\text{مس} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

تنبیه - میتوان از روی همان مفروضات در شکل سابق مساحت کثیر الاضلاع
منتظم محیطی استخراج نمود که دارای ۲ ع ضلع باشد

نقطه وسط قوس اب است و خط ا ب را وصل میکنیم وسط کثیر الاضلاع معلوم
که مسه فرض میکنیم کتب میشود از ۲ ع مثلث متساوی که یکی از آنها دء است

$$دء = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$$

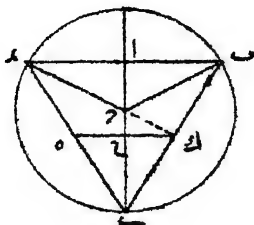
$$\text{پس مس} = ۲ \times \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۱۲$$

مس باب مثال منخواهیم مساحت دوازده ضلعی منظمی ای معلوم کنیم

$$۲ = د و ۴ = ع و بنا بر این مسه = \frac{۲ \times ۴}{۲} = ۴$$

قضیه ۱۹ مسئله

در صورتیکه مفروض باشد از این شعاع $\gamma = \mu$ و از کثیر الاضلاع
منتظم مجاطی ارتفاع $\gamma = \alpha$ ن میخاریم معلوم کنیم شعاع δ و ارتفاع
ن از کثیر الاضلاع منتظمی را که عدد اضلاعش ضاعف کثیر الاضلاع
مفروض باشد و محیطش مساویان



فرض میکنیم ب ضلع کثیر الاضلاع منتظم مفروض
باشد و مرکزش را ارتفاع γ را امتداد میسیم
تا محیط را بر نقطه قطع کند و دو خط ب و د
را وصل میکنیم آنوقت ب د زاویه مرکزی کثیر

الاضلاع مطلوب میشود چونکه مقدارش نصف ب د است و چون عمود ح که
بر ب د فرود آوریم و ک ه را موازات ب د رسم کنیم طول ل ه نصف ب د میشود
و بنا بر این ضلع کثیر الاضلاع جدید است که شعاعش باشد و ل ارتفاعش
تساوی حاصل شود $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\alpha}$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\alpha} \quad (۱)$$

و خلاصه در مثلث قائم الزاویه ح که این تساوی حاصل شود که $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\mu}$

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\mu} \quad (۲)$$

شرح این نکته هم از اصل شکل ظاهر است هم از روی دستور که ن بزرگتر است از ن
بر خلاف δ کوچکتر است از δ و از این قرار در کثیر الاضلاع جدید تفاضل ما بین شعاع و
ارتفاع کمتر است از آنچه در کثیر الاضلاع مفروض داشتند

و چون بهین وجه کثیر الاضلاع دویم را بهیچ تحول کنیم و آنرا بجایارم و بکند از عاقبت بکثیر
الاضلاعی برسیم که تفاضل ما بین شعاع و ارتفاعش کوچکتر باشد از هر مقدار مفروضی

هندس

برضا - در مثلث ب د ا این تساوی حاصل شود

$$ب - د > ا > ب \quad یا \quad د - ن > ب \quad ا$$

و ل ب ا که نصف ضلع کثیر الاضلاع باشد بعد از آنکه عدد ضلع بی اندازه تصغیف
کوچکتر از هر مقدار مفروضی شود و بنا بر این د - ن نیز تواند کوچکتر شود از هر مقداری
قابل اشاره حتی باشد

قضیه ۲ مسئله ۲

میخواهیم مقدار تقریبی نسبت محیط ذابطر استخراج کنیم

در اشکال سابقه برین شد که محیط $d = 2\pi r$ و دایره $d = \pi r^2$

و از آنها این دوتاوی استخراج شود $\frac{د}{\pi} = \frac{محیط}{\pi} = \frac{د}{\pi} = \frac{د}{\pi} = \frac{د}{\pi}$ (۲)

و از اینجا چهار قاعده در استخراج مقدار استنباط شود

۱) زیرا که در دستور (۱) میتوان محیط را معلوم فرض کنیم و شعاعش را استخراج نمود

یا بالعکس شعاع را معلوم فرض کرد و محیط را استخراج نمود و در دستور (۲) نیز

میتوان شعاع را معلوم فرض کرد و مساحت دایره را استخراج نمود یا مساحت را معلوم

فرض کرد و شعاع استخراج نمود

و چون بنای این اصول است بذکر یک قاعده که گفتیم و آن قاعده اول است

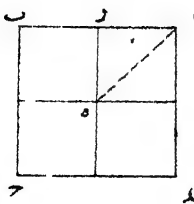
که فرض میکنیم محیط d واحد باشد و میخواهیم آنرا

طول شعاع را معلوم کنیم شکل مربعی بر واحد طول

رسم میکنیم بر محیطش چهار واحد شود

و فرض میکنیم d و n شعاع و ارتفاع این مربع باشد

$$انوقت \quad d = \frac{4n}{\pi} \quad و \quad n = \frac{1}{4}d$$

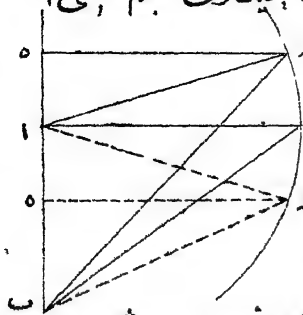


مقاله چهارم

۱۳۶

قضیه اول

میان جمیع مثلثاتی که ترکیب شوند از دو ضلع مفروض بنا بر آنکه زاویه حادثه مابین آنها تغییر پذیر باشد و اختیاری اعظم مثلثی است که اندو ضلعش زاویه قائمه حادث کنند



مثلاً در مثلث ABC و AB که ضلع AC

مشترک است و ضلع $AD = AC$ و زاویه BAC

قائم که بیشترین مثلث ABC اعظم است از مثلث

ABD که زاویه ABD حاده باشد یا منفرجه

برهان قاعده AB چون در هر دو مثلث است اندو مثلث بر نسبت و ارتفاع AC و AD

باشند ولی عمود AD اقل است از دو مایل مساوی AC و AD پس مثلث ABC بزرگتر است

از مثلث ABD و بنحی که کلی است در سایر مثلثات

قضیه دوم

در جمیع اشکال مسطحه متساویج الدو وسطی ذایره اعظم باشد

اولاً این قاعده معلوم است که بر فرض اتحاد طول محیط اشکال بیضی پدید می آید که از بیشترین

و وسعت مختلف باشد ولی این اختلاف بی اندازه نباشد و وسعت شکل تا حد معینی ترکیبی

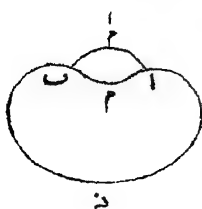
پس فرض میکنیم میان این همه اشکال متساویه الدو یک شکل اعظم یا بیشتر موجود باشد

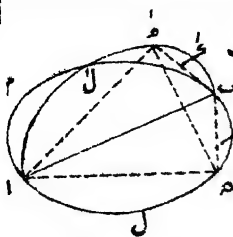
ثانیاً آن شکل که در محیط مفروض مسطحش اعظم است

مجموع باشد زیرا که اگر در خط مسدود غیر مجزا AM باشد

قطعه AM با راجع دو نقطه AOB دورانی

تا بوضع AM بقرار گیرد و شکل جدید AM باشد



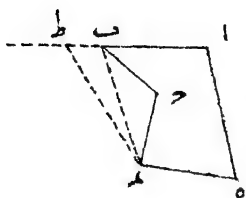


اعظم باشد از ۲

پس این دایره ثانی سطحی عظمی شود از دایره اول محیطش اقصر و این محالست

قضیه چهارم

هر کثیر الاضلاع مثل اب حده را که دارای یک زاویه مقعر باشد می توان
مبدل نمودش بکثیر الاضلاعی محدب که وسعتش بیشتر باشد و محیطش
بزرگتر و یک ضلعش کمتر



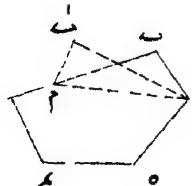
برهان چون اب را امتداد دهیم نقاط مختلفه را
وصل کنیم نقطه مجموع ب ط + طه روی ب را ب
است از ب به الی غیر نمایه پس را بینه نقطه میست

شود مثل ط که اینجا ب ط + طه = ب ط + طه

و در آن نقطه کثیر الاضلاعی ترکیب شود مثل اب طه که وسعتش ظاهر اعظم است
از شکل مفروض و محیطش برابر است و یک ضلع کمتر دارد

قضیه پنجم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویه الاضلاع که عدد اضلاعشان
باشد کثیر الاضلاع منتظم اعظم است

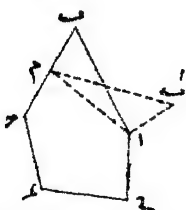


برهان در اثبات حکم مذکور باین وجهش میرویم که
اگر کثیر الاضلاعی جمیع اضلاعش متساوی باشند
و همچنین جمیع زوایایش در جمله اشکال متساویه الاضلاع
که بیک عدد اضلاع باشند چنین شکل اعظم نتواند شد

اولا فرض میسکنیم کثیر الاضلاع اب حده صاحب ب ضلع باشد و اب ب

و بر ب نقطه م را اندر نزویک به د فرض میکنیم که باز اب د ب م و بعد زاویه
 ا ب د را مساوی ب ا م رسم میکنیم و م ب را مساوی اب جدا میکنیم و خط ا ب
 را وصل میکنیم و مثلث ا ب م مساوی میشود با مثلث ا ب م
 از اینجا معلوم شد که میتوان کثیر الاضلاع اب د م د را تبدیل نمود ب کثیر الاضلاع ا ب
 م د م که صاحب همان وسعت همان محیط باشد چرا که عدد اضلاعش ۴ + ۱ است
 و دارای یک زاویه مقعر است زیرا که اب چون قشر است از ب م زاویه ب م ا منفرجه شود
 از ب ا م یا از ب م ا

و کثیر الاضلاع ثانی را بر قضیه سابقه میتوان تبدیل نمود بشکل دیگری که صاحب ۴ ضلعی
 و همان محیط و وسعتش بیشتر باشد پس معلوم شد که در جمله اشکال متساویة الزاویه
 ضلعی شکل اب د م د مختلفه الاضلاع اعظم نیست
 ثانیاً در کثیر الاضلاع ۴ ضلعی اب د م د فرض میکنیم
 زاویه ا ب د و نقطه م را اندر نزویک به ب فرض
 میکنیم که زاویه ا ب د بزرگتر باشد از ا ب م د



و زاویه م ا ب را مساوی ا م ب رسم میکنیم و ضلع اب را مساوی م ب جدا میکنیم و خط ا م
 را وصل میکنیم و مثلث م ا ب مساوی میشود با مثلث ا ب م و کثیر الاضلاع ا ب م د
 وسعت محیطش برابر شود با اب د م د ولی عدد اضلاعش ۴ + ۱ است و دارای یک زاویه
 مقعر است زیرا که چون ا م د + ا ب د = پس ۲ م ا ب + م ا ب < ۲ قائمه
 و این کثیر الاضلاع را میتوان تبدیل نمود بشکل دیگری که صاحب ۴ ضلعی باشد و همان محیط و
 بیشتر پس اب د م د اعظم نیست
 قضیه ششم

مقاله چهارم

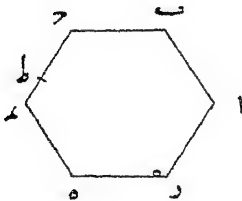
۱۴۰

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویه الوُسعه که عدد اضلاعشان نشان
باشد کثیر الاضلاع منتظم محیطش اقصر است

برهان اگر کثیر الاضلاع غیر منتظمی که صاحب ضلع باشد و بسعت م محیطش اقصر شود
از کثیر الاضلاع شطبی که همان بسعت باشد و صاحب همان عدد اضلاع بقیوان کنیم
قضیه سابقه بدلیل کنیم از کثیر الاضلاع شطبی که همان دور باشد و صاحب ضلع و
وسعت مساوی باشد از م پس این کثیر الاضلاع منتظم ثانی عدد اضلاعش برابر آن
شد و محیطش اقصر و وسعتش بیشتر و این محال است

قضیه هفتم

از دو کثیر الاضلاع منتظم متساویه الدورات و آنکه عدد اضلاعش بیشتر نباشد
اعظم است



برهان فرض میکنیم اب د ه د کثیر الاضلاع
منتظم شش ضلعی باشد و نقطه ط را بر یکی از اضلاع
نشان میکنیم و آنوقت میتوان شکل کثیر الاضلاع
غیر منتظم هفت ضلعی فرض نمود که زاویه حاده

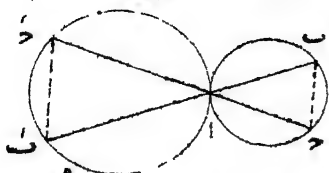
باین دو ضلع شط د و ط د دو قائمه باشد و چنین کثیر الاضلاع بنابر
قضیه ۵ کوچکتر است از کثیر الاضلاع منتظم هفت ضلعی که همان دور
باشد فهو المطلوب

احکام مضربین مماسی

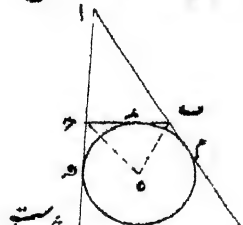
اولی شکل که روشن و یابش بر اواسط اضلاع هر دو اربعه ضلع باشد متوازی الاضلاع است

۲- از نقطه مفروضه در درون مثلث متاویة الاضلاع چون سه عمود بر اضلاعش فرو آوریم مجموع آنها مقداری شود ثابت و آن یک کم را در نقطه خارج مثلث نیز تحقیق کنید و بهیند چه میگوید

۳- چون بر نقطه تماس ۱ از دو دایره مماس دو قاطع ب ب و ج د را بر آوردیم ثابت کنید دو خط ب ب و ج د متوازی باشد



۴- در هر دو اربعه ضلع محیط بر دایره مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر (هکس این مسئله نیز صحیح است)



۵- دایره ه را مماس کنیم بر دو ضلع زاویه ا و خط

ب د را مماس کنیم بر دایره و منتهی بنماییم بر دو ضلع

زاویه پس میبینیم که اولاً محیط مثلث ا ب د

ثابت است در هر جا از هوس ا د د نقطه تماس فرض شود و ثانیاً مقدار زاویه ب

ع - چون مواقع سه ارتفاع مثلثی را باین مسم وصل کنیم مثلثی جدید ترکیب شود که خطوط

منصف الزوایش ارتفاعات مثلث اول باشند

۶- مواقع سه ارتفاع مثلث و اواسط سه ضلعش بر محیط دایره واقع شوند بر هر سه

۸- در شکل دو اربعه ضلع چون بر سه ضلع متوالیش دایره مماس کنیم از مرکز چهار

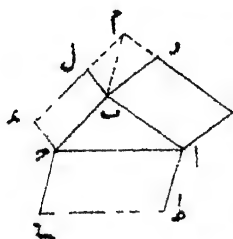
دایره مماسه که بدست می آید دو اربعه اضلاعی ترکیب شود که قابل محاط شدن بر دایره

۹- دو خط منصف دو زاویه حادثه باین هر دو ضلع متقابل و اربعه ضلعی محاطی بر آن

قائم متقاطع شوند

۱۰- چون از نقطه مفروضه بر دایره محیطیه بر مثلثی سه عمود بر اضلاع مثلث فرود آوریم مواضع آنها بر خطی مستقیم واقع شوند

۱۱- بر دو ضلع اب و ب د مثلث اب د دو متوازی الاضلاعی مثل اب ر ه و ب د ل رسم کنیم و ضلع ه د و د ل را امتداد میسیم تا نقطه م و خط م ب را وصل میکنیم و با بجهه ب ضلع ا د متوازی الاضلاعی رسم می کنیم



که ضلع ه ج و ر ش مساوی و موازی باشد با م ب پس ثابت کنید که این متوازی الاضلاع معادلت مجموع دو شکل دیگری و از آنجا شکل ع و س را هشتا ط می نامند

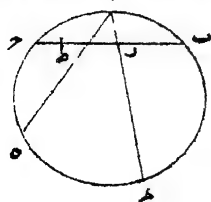
۱۲- سه ارتفاع مثلث بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۳- خطوط سه ضلع با بین و ش مثلث و اواسط اضلاعش بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۴- نقطه تقاطع سه ارتفاع مثلث و نقطه تقاطع خطوط منصف قواعدها و مرکز دایره محیطیه اش بر خطی مستقیم واقع شوند و فاصله با بین و نقطه اول منصف فاصله با بین و نقطه

۱۵- چون از نقطه مفروضه دو خط رسم کنیم که قاطع دایره شوند و عمود بر یکدیگر مجموع دو وتر دو وتر مقداری شود ثابت

۱۶- چون دایره دو بد متقاطع شوند سه وتر فصل مشترک آنها بر یک نقطه متقاطع شوند



۱۷- چون از نقطه اوسط قوس ب ج دو قاطع ا ر د و ا ط ه را رسم کنیم چنانچه نقطه د و و ط و ه بر محیط دایره واقع شوند

۱۸- چون سه دایره هم یکدیگر را د و بد و مماس کنند

هندکس

خطوط مماسی که بر آن نقاط تماس گذرند بر یکب نقطه متقاطع شوند

۱۹- مجموع دو مربع دو قطر هر دو اربعه مضاعف مجموع دو مربع دو قطری که وصل شوند باین هر دو ضلع متقابل

۲۰- چون در مثلثی خطوط چند موازات قاعده اش رسم کنیم و اقطا بر جمیع اشکال دو د را که باین خطوط حادث میشوند وصل کنیم نقاط تقاطع آن اقطار واقع شوند بر خط و مثلث را بر این مثلث و وسط قاعده

۲۱- در دو اربعه اضلاع محاط در دایره چون از نقطه مفروضه بر محیط چهار عمود بر اضلاعش فرود آوریم حاصل ضرب دو عمود وارد بر هر دو ضلع متقابل مساویست بحاصل ضرب عمود دیگر

۲۲- چون از نقطه مفروضه در درون کثیر الاضلاع مستطیقه که صاحب ضلع باشد بر جمیع اضلاعش فرود آوریم مجموع آنها مساوی شود با ع برابری شعاع دایره محاطه بر گوش

۲۳- چون از جمیع رؤس کثیر الاضلاع مستطیقه عمود فرود آوریم بر خطا بر مرکز رؤس مجموع آن عمودها نیکه واقع شده باشند در یک سمت خط مساویست با مجموع عمودها واقع در جهت دیگر

۲۴- چون دایره را بلغزائیم و بچرخانیم در دایره ساکن ثابت الوضعی که شعاعش عمود بر دایره اول باشد بر وجهی که دو دایره همواره مماس بمیکر باشند و نقطه بر محیط دایره اول

فرض نموده باشیم این نقطه در تمام حرکت دایره خطی مستقیم رسم کند

در امکان هندسیاتی

۱- معلوم کنیم مکان هندسی نقاطی را که مجموع دو فاصله هر یکد ایشان از دو نقطه معلوم مساوی شود با طول خط مفروضی دیگر

۲- معلوم کنیم مکان نقاطی را که تفاضل دو فاصله هر یکد ایشان از دو نقطه معلوم مساوی شود با خط دیگر

۳- معلوم کنیم مکان هندسی مراکز دایره ای را که مرکز کنند بر دو نقطه مفروضه

مقاله چهارم

۱۴۴

- ۴- معلوم کنید مکان هندسی مرکز دایره‌ای را که بیک شعاع مفروض تماس کند بر خط مفروض
- ۵- معلوم کنید مکان هندسی مرکز دایره‌ای را که بشعاع مفروضی تماس کند دایره مفروضه
- ۶- بر جمیع نقاط دایره خطوط متوازی مرور می‌دهیم و از جمیع آنها طول متغی جبرائیم

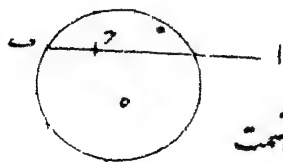
پس معلوم کنید مکان هندسی اطراف آن خطوط را

- ۷- معلوم کنید مکان هندسی اوساط اوتاری از دایره را که جمیع اوتار کنند بر نقطه مفروضه
- ۸- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی را که مواقع اعده واردا بر یک دایره بر آن ضلع مثلثی بر استقامت خطی واقع شوند

- ۹- معلوم کنید مکان هندسی نقاطی را که فاصله هر یک از دو خط مفروض بر نسبت معینه باشند

- ۱۰- مطلوب است مکان هندسی نقاطی که مجموع یا تفاضل دو مربع و دو فاصله هر یک از دو نقطه معین مساوی باشد با مربع مفروضی

- ۱۱- دو دایره مفروض است و مطلوب باشد مکان هندسی نقاطی که خطی که خطوط هر دو را آنها بر آن دو دایره مساوی باشند



- ۱۲- بر نقطه اخلاط اب مرور

داده و بر دایره منتهی نموده ایم و آنرا بر δ چنان قسمت

کرده ایم که $اب : ا\delta = م : ع$ و مطلوب است مکان هندسی نقاط δ

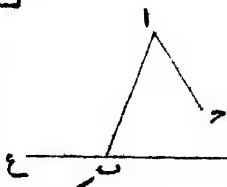
- ۱۳- بر نقطه اخلاط اب گذشته است و منتهی شده است دایره δ و بر این خط

δ چنان اختیار شده که $اب \times ا\delta = م^2$ و مطلوب است مکان نقاط δ

همین دو مسئله را حل کنید بنا بر آنکه دایره بخلی مستقیم مبدل شود

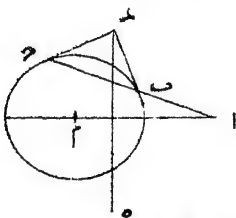
- ۱۴- بر نقطه اخلاط اب مرور می‌دهیم که منتهی شود به خط مفروض $م\delta$ و

۱۰- راجحان هر دو میسیم که زاویه β α مساوی شود
 بزایه مفروضه و بر وجهیکه $\alpha = \beta$ یا آنکه
 $\alpha \times \beta = \alpha^2$ و مطلوب است مکان نقاط



همین شده احل کنید بنا بر آنکه خط α متبدل شود بدایر سه
 ۱۱- مطلوب است مکان نقاطی که از آنها دو زاویه مفروضه را بیک زاویه معین می کنند
 ۱۲- بر دو خط متقاطع زاویه قائمه خطی بطول معین بکشیده و سیفره و مطلوب است
 مکان اوساط او تا مثلثاتی که با حرکت ترکیب می شود

۱۳- مثلث متساوی الاضلاعی فرض شده و مطلوب است مکان نقاطی که فاصله هر یک
 از یکی از رؤس مثلث مساوی شود با مجموع دو فاصله همان نقطه از دو رؤس دیگر مثلث



۱۴- از نقطه 'ا' واقعه در سطح دایره 'م' قاطع
 او را رسم نموده ایم و بر دو نقطه تقاطع 'ب' و 'ج'
 دو خط مماس مطلوب است مکان نقاط
 (مکان مطلوب خط α است که عمود باشد

بر قطر α بر نقطه 'ا' این خط را خطی نقطه اکوئیم و این نقطه را قطب خط α ده)

۱۵- مطلوب است مکان نقاطی که مجموع مربعات ابعاد هر یکشان از رؤس
 مثلث متساوی الاضلاعی مساوی شود مربع مفروضی

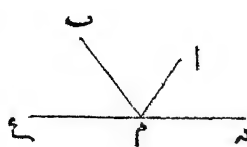
۱۶- همین شده را حل کنید بنا بر آنکه مثلث متساوی الاضلاع متبدل شود و بیشتر
 الاضلاع منظمی

۱۷- مطلوب است مکان نقاطی که مجموع مربعات ابعادشان از اضلاع کثیر الاضلاع
 منتظمی مساوی شود مربع مفروضی

مسائل جل کردنی

۱- بر نقطه مفروضه خطی مرور دهید که مساوی البعد باشد از دو نقطه مفروضه دیگر

۲- دو نقطه a و b مفروض است میخواهم بر خط sd نقطه مشخص کنیم مثل m که چون وصل شود به دو نقطه a و b دوراویه am سه و bm سه مساوی شوند



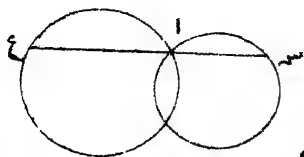
۳- بر نقطه مفروضه خطی مرور دهید که قطع کند دو متوازی اینجا خطی قطعه واقع باین دو متوازی از این خط مساوی شود بخط مفروضی

۴- در شکل مربع نقاض باین قطر و ضلعش معلوم است آن مربع را رسم کنید
۵- در مثلثی قاعده و زاویه مقابل و مجموع یا تفاضل و ضلع دیگر از معلوم است آن مثلث را
۶- دایره بشاع معین رسم کنید که اولامرور کند بر دو نقطه ثابتا مرور کند بر نقطه تماس کند خطی را ثالثا تماس کند و دو خط را رابعا تماس کند خطی و دایره را خامسا مرور کند بر نقطه و تماس کند دایره را سادسا تماس کند دو دایره را

۷- از نقطه مفروضه خطی دایره مفروضه مرور دهید چنانچه وتر یکی که از این خط در واقع شود مساوی باشد با خط مفروضی

۸- بر نقطه مفروضه دایره مرور دهید که تماس کند دایره مفروضه و خطی مفروض را
۹- بر نقطه مفروضه دایره مرور دهید که دایره مفروضه دیگر را بر نقطه مشخصه تماس کند
۱۰- مثلثی رسم کنید مساوی با مثلث مفروضی چنانچه اضلاعش مرور کنند بر نقطه مفروضه
۱۱- دو دایره متقاطعه مفروض است میخواهم بر یکی از دو نقطه فصل مشترک آن خطی مرور دایره مرور دهید که فاصله sd واقع باین دو نقطه فصل مشترک این خط

و دو دایره مساوی شود خط مفروضی را



۱۲- بر نقطه ا خط سماع را چنان

مرور دهید که سه: ا: ع = م: نه

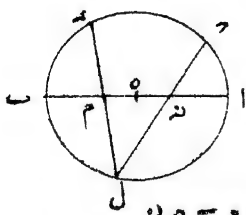
۱۳- بر نقطه ا خط سماع را چنان مرور دهید که ا: ع = سه

۱۴- دو دایره مفروض است میخواهیم هموارات خط معلومی قاطعی در اندو کند را نیم چنانچه مجموع دو و ترواقع در دایره مساوی شود خط مفروضی

۱۵- در شکل ذوا بعد اضلاع معلومت دوزاویه متقابل و دو قطر و زاویه حادثه بین اند و قطر حال آنکه شکل را رسم کنید

ع-ا- دو دایره مفروض است نقطه مشخص کنید که در هاسم سوم آن نقطه بران دو دایره مساوی شود و زاویه میفتنه باینها

عادت شود



۱۶- قوس د و قطار معلومت

میخواهیم بر محیط نقطه مشخص کنید مثل بر و

که چون و خط د و ل در او وصل کنیم فاصله م = ه = نه

۱۷- دو دایره مفروضه مثلث متوی الساقیتی محاط کنید که مجموع قاعده و ارتفاع مساوی شود خط معلومی را

۱۹- مثلثی رسم کنید که طول آن خط واصل از رؤس بر او ساط اضلاعش معلوم باشد

۲۰- مثلثی رسم کنید که سه ارتفاعش معلومت

۲۱- مثلثی رسم کنید که سه زاویه مجموع اضلاعش معلوم باشد یا سه زاویه و مساحتش

۲۲- مثلثی رسم کنید که قاعده و زاویه مقابل و نسبت دو ضلع دیگرش معلومت

۲۳- مثلثی رسم کنید که قاعده و ارتفاع و مسطح دو ضلع و یک رأس معلومت باشد
 ۲۴- بر صفحه کاغذ دو خط معلومت چنانچه اگر امتدادشان در خارج ورق تقاطع
 حال میخواهیم بر نقطه مفروضه خطی مرور دهیم که چون امتدادیابستنی شود نقطه تقاطع موهومی اندوخط
 ۲۵- در دایره مثلث نقطه شش کنید که چون وصل شود بر رؤس آن مثلث سطحش را قسمت
 به سه مثلث متعادل

۲۶- دایره بر نقطه مفروضه چنان مرور دهید که تماس کند دو دایره مفروضه دیگر را
 ۲۷- دایره رسم کنید که تماس کند سه دایره مفروضه را
 ۲۸- دو ذقعه رسم کنید که زاویا و طول و قطرش معلومت
 ۲۹- سه دایره متجه اگر معلومت مثلثی رسم کنید که رؤسش واقع شوند محیط آنها و
 شکلش مشابه باشد مثلث مفروضی را

همین مسئله را حل کنید بنابر آنکه سه دایره متبدل شود به سه خط متوازی
 ۳۰- در زاویه مفروضه نقطه معین است میخواهیم بر آن نقطه خطی چنان مرور دهیم که
 حاصل ضرب دو قطعه واقع باین آن نقطه و دو ضلع زاویه مساوی شود مربع مفروضی را
 ۳۱- بر نقطه مفروضه در سطح دایره خطی مرور دهید که دو فاصله آن از دو نقطه
 مشترک خط و دایره بر نسبت م باشد به د
 ۳۲- بر نقطه مفروضه دو مرکز دایره معین بزرگ مرور دهید که وتر مشترک باین بنا
 مساوی شود خط مفروضی را

مقاله پنجم

در احکام خط تقسیم و سطح مستوی که واقع شده باشند در فضا و از آنها هندسه
فضای کوهیم روان نه از مسطحیات است و نه از مجسمات
و مقدمه دهند که تصویریت که شعبه باشد از شعب علم سطح اجسام

تعریف

۱- خطی را بر سطح عمود گوئیم هرگاه عمود باشد بر جمیع خطوطی که از موقش و از سطح رسم شده باشد
و در چنین حالت سطح را بر خط عمود خوانیم
موقع عمود نقطه ایست که آنجا خط مفروض سطح مذکور را قطع نموده

۲- خطی را با سطح موازی گوئیم در آن حالت که نتواند متداقی شوند اگر چه نهایت
امتداد داده شوند در چنین حالت سطح را نیز با خط موازی گوئیم
۳- دو سطح را متوازی گوئیم در آن حالت که نتواند متداقی شوند اگر چه نهایت امتداد داده
شوند در جهتین

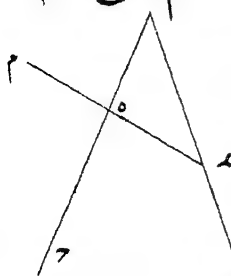
۴- سطوح را در هم میاشاکال را بدیم می گوئیم ولی باید بنا را غیر می و تصور نمود
بقیه اول کتاب ذکر شد که من باب خفای عبارت هر جا خط و سطح مخلوق گوئیم تا مقید
نشده باشند مقصود متفهم مستوی است

قضیه اول

خط ممکن نیست جزئیش در سطح باشد و جزئیش که خارج سطح است
زیرا که بنا بر تعریف سطح بعد از آنکه خط و نقطه اش را شاکش نماید در آن واقع می شود
شکل چون خواهیم بدیم سطح مطلق مستوی است باید خطی تقیمی را در جهات مختلفه بر آن
داد و دید در تمام طولش بر آن واقع می شود یا نه

قضیه دوم

بر دو خط متقاطع میتوان سطحی مروداد و پیش از یک سطح ممکن نیست



اب و اد دو خط متقاطع اند براب سطحی مرور
میگیریم و حول همین خط دورانش میگیریم تا بر نقطه
د بگذرد آنوقت خط اد و نقطه اش را بر این
سطح واقع میشود و بنا بر این تمامش در این سطح خواهد
بود و وضع سطح در فضا درست معین میشود

حال کنیم که بر دو خط اب و اد پیش از همان یک سطح میتوان مرور داد
بر آنها فرض میکنیم بر آنها دو سطح مرور کرده باشد و م نقطه باشد بر یکی از آن دو سطح
و در سطحی که شامل این نقطه و دو خط اب و اد باشد خطی بر آن نقطه مرور میگیریم چنانکه
اندو خط را برده قطع کند حال خط ده م چون دو نقطه اش واقع است بر دو خط
اب و اد تمامش واقع شود و در دو سطحی که بر این دو خط گذشتیم نقطه م نیز در آنها واقع
است و دو سطح در جمیع نقاط خود مشارک میشوند پس بر هم منطبق اند و یک سطحند
نتیجه اینست که یا به نقطه اب و د غیر واقعه بر یک استقامت وضع سطحی ممکن نشود
پس خط اب و د موازی اب و د نیز وضع سطحی ممکن نشود زیرا که سابق ذکر شده که دو خط
موازی در یک سطح واقع میشوند و پیش از یک سطح هم نمیتوان بر اند و مرور داد چونکه بر یک
آنوقت مایهت شامل شوند و نقطه از خط اب و یک خط از د را یعنی سه نقطه غیر واقعه بر یک استقامت

قضیه سوم

فضل مشترک مابین دو سطح خطی است مستقیم
بر آنها اگر در میان نقاط مشترکه در دو سطح سه نقطه پیدا شد غیر واقعه بر یک استقامت

آنوقت چون دو سطح
برای نقطه مشترک
منطبق شوند و یک سطح
و اینجاست فرض است

قصہ مختصر

هرگاه خط ال عمود باشد بر خط اب و در متقاطع بر موقع سنج
سطح سنج پس عمود میشود بر خط ثالث لکن که ازها متوقع در همان سطح

رسم شد و بنا بر این عمود میشود بر آن سطح

برہنہ۔ در سطح سیم خط ب د راخان ریم سیم

که هر سه طالب و دل و دل را قطع کند و آل

به باز از خود تا نقطه ا امتداد می دهیم و دو نقطه

وَأَرْبَعَةُ قُطُوبٍ وَلَكِنَّ وَحْدًا وَصَلَّ مُكِنِّمٌ

حالت فعل چون نمود است بـ و سـ تا ا و دو مایل د ا و ا متساوی همیشه

وہمچنین دوا نکل ب اوب ا پس دھلت ب د ا و ب د ا چون ضلع ب د رامشرک

دارند و سایر اصلا عشاق نظیر نظیر قضا و لیت قضا و ی باشند و اگر مثلث ب د ا را

حول بحر دوران، مسیم تا منطبق شود بر بـ، ا نقطه ا واقع شود در ا و موضع نقطه

لہ چون در این حرکت تغیر نمکند خط که ا منطق شود بر که ا

بر خط ل که چون نقطه اش ل و ک متساوی البعد شدند از طرفین خط ا ا و باشد

فصل پنجم

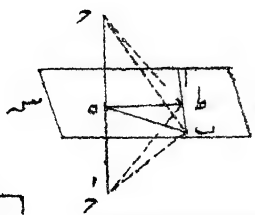
از نقطه مفروضه میتوان یک عمود بر سطحی اخراج نمود و پیش از یک

عمود ممکن نبیاست

اول نقطه منفرد و تنهه را در سطح سیاه قرار می‌دهم و خطی

مثلاً در این طرح رسم میکنیم و خط را بر آن عمل

یکسینم و براب سطح غمرانه مسج، توهم مسکنم و در آن



سطح خط δ را برابر عمود میکنیم و در سطح δ خط ϵ را بر δ عمود میکنیم و میگوئیم

δ عمود است بر سطح ϵ

بر همان بر نقطه δ خط ϵ را در سطح ϵ مرور میکنیم و δ را با اندازه خود

ناشط δ امتداد میدهیم و خطوط δ و ϵ را وصل میکنیم

حال خط α ب چون عمود است بر دو خط δ و ϵ عمود باشد بر سطح δ و ϵ و بنا

بر خط δ که در آن سطح واقع است پس دو مثلث δ و ϵ قائم الزاویه اند و بنا

چونکه δ و ϵ در هر دو مشترک است و δ و ϵ دو مثلث متساوی البعد از موقع عمود δ

و متساوی باشند

پس δ و ϵ از این قرار δ عمود میشود بر وسط δ و چون خط عمود بود بر

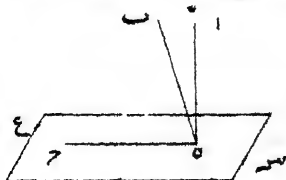
دو خط δ و ϵ عمود باشد بر سطح ϵ

حال در همان شکل نقطه مفروضه δ را خارج سطح ϵ فرض میکنیم و در سطح خط α رسم

میکنیم δ را بر آن عمود میکنیم و در همان سطح خط δ را برابر δ عمود میکنیم و در سطح

δ خط δ را بر δ عمود میکنیم و آن عمود میشود بر سطح و دلیل بعینه همانست که در حالت

اول ذکر شد



حال میگوئیم که از نقطه δ واقع در سطح ϵ

ممکن نیست پیش از یک عمود بر سطح ϵ خارج نمود

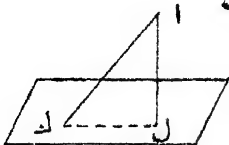
زیرا که اگر متداوم عمود δ و ϵ ممکن بود

پس بر این دو خط متقاطع سطحی مرور میدادیم و آن قطع میکرد سطح ϵ را بر خط δ و آن

وقت دو خط δ و ϵ در یک سطح عمود میشدند بر یک نقطه δ و این محال است

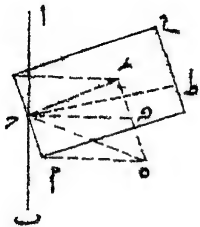
و همچنین از یک نقطه خارج سطح پیش از یک عمود ممکن نیست بر سطح ϵ فرود آورد زیرا که

مثلاً دو عمود $ال$ و $الد$ را ممکن بود فرو آوریم آنوقت
مثلاً $ال$ که دارای دو زاویه قائمه میشد و آن نیز
محالست



قضیه ششم

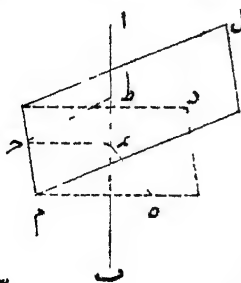
بر نقطه مفروضه میتوان یک سطح مرود داد که عمود باشد بر خط مفروضه
و بیش از یک سطح عمود ممکن نیست مرور میهند



اولاً نقطه مفروضه را بر خط مفروضه قرار میدهند
و دو سطح برابر مرور میدهند و آنها را $د$ و $ه$ را
عمود میگویند بر خط $اب$ پس ظاهرست که سطح $م$ و $ه$ را

بر این دو خط عمود شود برابر

حال کوئیم غیر از سطح مذکور بر سطحی مثل $م$ که مرور نماید بر $د$ عمود نشود برابر زیرا
اگر در این صورت سطحی مرور در $م$ بر $اب$ قطع کند $م$ و $ه$ را بر دو خط $د$ و $ه$ که $ا$



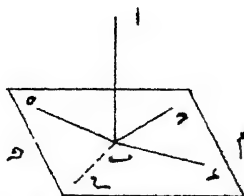
یک نقطه و در یک سطح هر دو عمود اند برابر و اینجاست
ثانیاً نقطه مفروضه را در خارج خط $اب$ فرض کنیم
و $د$ را بر آن خط عمود میکنیم و در سطحی که بر خط $اب$ که شبیه
 $ه$ را بر آن خط عمود میکنیم پس سطح $م$ و $ه$ را بر دو خط

$د$ و $ه$ عمود باشد برابر

حال کوئیم غیر از سطح مذکور بر سطحی مثل $م$ که بر نقطه $د$ مرور کند عمود نشود برابر و
سطح $اب$ قطع میکرد $م$ را بر $د$ که غیر از $د$ است (چونکه بنا بر حالت اول
نقطه $ط$ بر $د$ واقع نشود و الا لازم میاید که از نقطه واقع بر خط $د$ و سطح بر آن خط عمود کنیم)

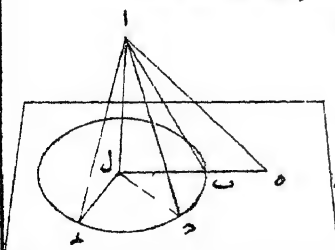
مقاله ششم

۱۵۳



و آنوقت از نقطه د دو عمود بر اب اخراج میشد
 نتیجتاً جمیع اعمد ب ح و ب ع و ب ه خارج
 از نقطه ب بر خط اب واقع شوند در یک سطح عمود بر
 اب زیرا که چون سطح م در روبرویم بر دو خط
 ب ح و ب ع انطباق عمود شود بر اب و باید ثابت کنیم که سایر عمود نیز در آن سطح واقع
 میشوند پس اگر گوئید ب ه در آن سطح نیست سطحی در می یابیم بر دو خط اب و ب ه تا قطع
 کند م نه را بر ب و آنوقت لازم آید که در یک سطح و از نقطه ب بتوان دو عمود ب
 و ب ج را بر اب خراج نمود
 قضیه ششم

چون از نقطه ا خارجاً بر سطح سبع عمود ال و خطوط مائله ا و ا ج و
 ا ه را بر آن سطح فرود آوریم گوئیم اولاً طول عمود ا قطریست از هر خط مائلی تا
 خطوط مائله که بیک فاصله باشند از موقع عمود متساویند و ثانیاً
 از دو مائله هر کدام بعدش از موقع عمود بیشتر باشد اولیست



برها - اولاً چون مثلث ال د قائمه است بر ا و
 ل مائله د مقابل زاویه قائمه اطول باشد از عمود
 ال ثانیاً چون دو زاویه ال د و ال ع قائمه اند
 ل د را مساوی ل ع فرض کنیم و مثلث ال د و
 ال ع دو ضلع و زاویه بینشان متساوی میگردد
 و متساوی میشوند پس اد = ا ع

ثالثاً - اگر فاصله ل ه بیشتر باشد از ل ج جزء لب را مساوی ل ع جدا کنیم

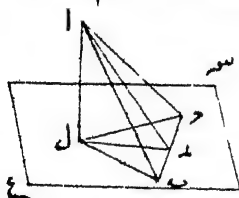
را وصل میکنیم و آنوقت اب مساوی است با اء و اقصر است از ا ه و ا و ا پس اء

فهمو المطلوب

نتیجه چون بیس خطوط مانند اب و اء و غیره منتهی میشوند محیط دایره ب و د
که مرکز آن نقطه ل موقع عمود باشد پس اگر خواهیم موقع عمود و اء از نقطه ا بر سطح را معلوم
باید در آن سطح سه نقطه ای و د را مشخص کرد که یک فاصله با از نقطه ا (و ان را برین
زود مشخص شود) و بعد مرکز دایره ماره بر این سه نقطه را معلوم کرد و آن موقع عمود مطلوب

قضیه هشتم

خط ال عمودیت وارد بر سطح س و ب و د خطی است مرسوم در آن سطح
و کوئیم چون از نقطه ل موقع عمود خط م را بر ب و د عمود کنیم اء را وصل



کنیم این خط عمود شود بر ب و د

بنیها دو نقطه ب و د و در طرفین مساوی

جذب میکنیم و خطوط ل ب و ل د و اب و اء را وصل

میکنیم آنوقت چون ب د = د ه و د و ا ل ب

و ل د مساوی شوند و چون نسبت بهمود ال دو فاصله ل ب و ل د مساوی کشید

و د و ا ل ب و اء مساوی شوند و چون دو نقطه ا و د از خط اء مساوی البعد شدند

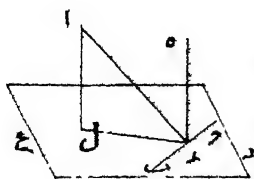
طرفین ب و د خط اء عمود باشد بر وسط ب و د

نتیجه از بیان مذکور چنین استنباط میشود که خط ب و د عمود است بر سطح ال و چونکه

عمود شده است بر دو خط اء و د و ل

قضیه نهم

هرگاه خط ال عمود باشد بر سطح س و خط مء موازی باشد با ال پس



عمود شود بر آن سطح
برها - رد و متوازی ال و ه سطحی می رسد
فصل مشترکشان با سطح خط است و در سطح
خط ب را عمود می کنیم بر د و خط ا را وصل می کنیم

پس بنا بر نتیجه سابقه ب د عمود باشد بر سطح ال ه پس زاویه ب د ه قائمه باشد
و همچنین ه د ل چونکه ال عمود است بر ل د و ه موازات ا و است پس ه د
عمود شود بر د و خط د ل و ب پس عمود شود بر سطح س ع که بر آنها گذشته
نتیجه ۱ - هرگاه دو خط ال و ه عمود باشند بر سطح س ع پس متوازی شوند و الا بر
خط موازات ال رسم می کنیم اینجا عمود شود بر سطح س ع و آنوقت از نقطه د دو عمود
بر یک سطح خارج شده

نتیجه ۲ - اگر دو فضا و خط ا و ب موازی شوند با خط ثالث د پس نسبت هم متوازی باشند
چونکه اگر سطحی بر د عمود کنیم دو خط ا و ب موازی با عمود د میشوند بر سطح و حکم مثلث اول است
میگردند

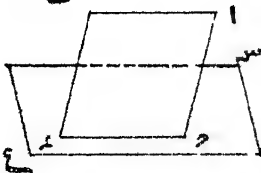
قضیه هفتم

از نقطه ا واقع در فضا می توان بیش از یک خط موازات د را رسم نمود
برها - هر خط که از نقطه ا موازات د رسم شود واقع گردد و سطحی را بر این نقطه و بر د
و سابق ذکر شده که در یک سطح از نقطه مفروضه می توان بیش از یک خط موازات خط دیگر رسم نمود

قضیه یازدهم

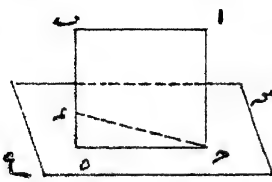
هرگاه خط اب موازی باشد با ج ه واقع در سطح س ع پس موازی شود با آن
برها - اگر خط اب واقع در سطح اب د متلاقی گردد با سطح س ع نقطه تلاقی البته واقع
بر د و فصل مشترک با این دو سطح با اب خط د را قطع کند پس سطح س ع متلاقی

نکرد و بنا بر این موازی باشد با آن سطح



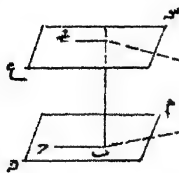
نقیصه ۱- هرگاه خط اب موازی باشد با سطح سب و سطح اب عمود بر آن باشد براب فصل مشترکش عمود موازی شود با اب زیرا که چون دو خط اب و عمود

واقع اند در سطح اب عمود اگر خط اب تلاقی میکرد عمود را سطح سب و این تلاقی میکرد و اینجا تلاقی



نقیصه ۲- هرگاه سطح سب موازی باشد با اب و از نقطه واقع در آن سطح خط عمود بموازات آن خط رسم کنیم تلاقی واقع شود در سطح سب و الا سطحی برای و بر نقطه مرور مینویسیم پس در فصل مشترک این

آن سطح موازی شود با اب و بنا بر این از یک نقطه دو خط بموازات خط دیگر رسم شده



قضیه ششم

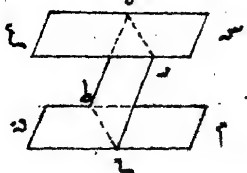
دو سطح سب و م عمود بر خط اب متوازی باشند برهان- اگر تلاقی بگذرد نقطه را بر فصل مشترک اختیار میکنیم و ا و ب را وصل میکنیم و خط ا ب

چون عمود است بر سطح عمود شود بر ا و ب از نقطه ا و ب بر خطی خارج شده و اینجا تلاقی است پس دو سطح متوازی متلاقی شوند و متوازی باشند

قضیه ششم

دو سطح متوازی سب و م نه را چون سطح ثالث را قطع کند دو فصل مشترک در دو سطح متوازی باشند

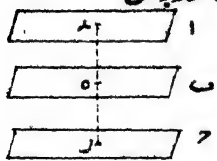
برهان. اگر این دو فصل مشترک متوازی نباشد و امتدادشان در یک مستقایی گردند و آنوقت دو سطح مربع و م که شامل اند و خط اند مستقایی شوند و این خلاف است



قضیه چهارم

خط ا ب عمود بر سطح مربع عمود باشد بر سطح م که موازیست با سطح مفروض (شکل ۱۲)

برهان خطی مثل ب د در سطح م میکنیم و برابر ب د سطح ا ب د را میگیریم پس خط ا د فصل مشترک این سطح و سطح مربع عمود بر سطح ا ب د و چون ا ب عمود بر سطح مربع عمود باشد بر خط ا د پس عمود شود بر موازی ب د و چون ا ب عمود بر موازی ب د که از موقش در سطح م رسم شود عمود باشد بر سطح



قضیه پنجم

دو سطحی ا و ب موازی با سطح ثالث موازی باشند برهان چون خط ا د برابر سطح د عمود که عمود شود بر د

سطح ا و ب و سایر و چون این دو سطح عمود شدند بر یک خط متوازی باشند

قضیه ششم

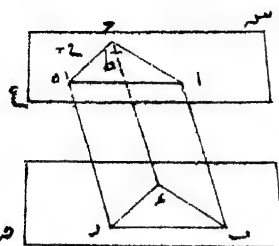
دو خط متوازی ه و ط و د (شکل ۱۳) واقع مابین دو سطح متوازی

مربع و م د متساوی باشند

برهان چون بر دو متوازی ه ط و د سطح ه ط د را میگیریم قطع کند دو متوازی را بر دو خط ه و ط و این دو فصل مشترک متوازی باشند ۱۳ و همچنین دو خط ه و د پس شکل ه ط د متوازی الاضلاع باشد ه و د = ط و د

نتیجه از حکم مذکور چنین معلوم میشود که دو سطح متوازی در همه جای یک فاصله اند زیرا که چون
 ه ط و ج را عمود کنیم بر اندو سطح متوازی شوند و بعد متساوی
 قضیه هفتم قلم ۱۲

هرگاه اضلاع دو زاویه \angle ا ه و ب و غیره واقع در یک سطح متوازی باشند
 و ممتد در یکجهت اند و زاویه متساوی میشوند و دو سطحشان متوازی
 بر آنها از مساوی ب م جدا کنند و ا ه =



ب و خطوط \angle ه و ب و \angle ا و ب و \angle ه و ب و
 هر سه یک نقطه چون از مساوی و موازی

با ب م شکل اب \angle م متوازی الاضلاع شود

و \angle م مساوی موازی گردد با اب و همچنین در

مساوی موازی باشد با اب پس \angle م نیز مساوی موازی باشد با ب و در شکل \angle ه و ب و

الاضلاع باشد و بنا بر این ضلع \angle م مساوی موازی شود با ب و پس ضلع \angle ه و ب و

و م و متساوی باشند و بنا بر این زاویه \angle ا ه مساوی شود با ب و

و در خصوص توازی دو سطح \angle ه و ب و فرض میکنیم سطحی که موازیات ب م و ب را

میگذرد متعلق کند و نقطه \angle و ب را نه برد و نقطه \angle و ب بلکه مثل ب برد و نقطه \angle و ب

و در این حالت \angle و ب را نقطه اب و ط و ج و مساوی شوند و سابق \angle و ب را

\angle و ب و متساوی بودند پس چنین نتیجه شود \angle و ب و \angle و ب و \angle و ب و

است پس سطح \angle ا ه موازی باشد با ب و

نتیجه هرگاه دو سطح متوازی ضلع و م در دو سطح متقاطع با ب و ب و ب و ب و

قطع کنند و زاویه \angle ا ه و ب و حاده مابین هصول مشترک دو سطح متوازی متساوی

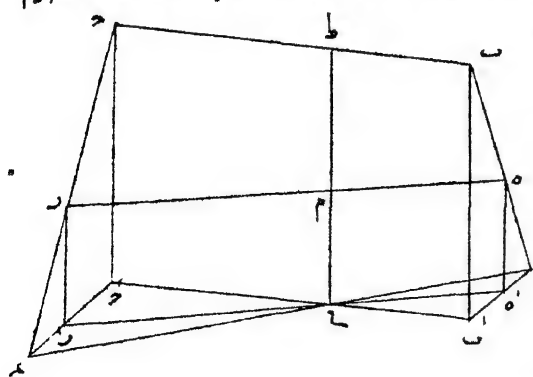
ط: و همچنین و فصل مشترک اد و ط را متوازی باشند و این شایب حاصل شود ا: ط =
 د: ر: و در نظر نسبت مشترک ا: ط: ط این شایب چه شود ا: ه: ب: د: ر: و د:

قضیه بیستم

شکل اب د ذو اربعة اضلاعی است مطلقا از آنکه در یک سطح بکشد
 یانه و بدو خط ه و و ط اضلاع متقابل که زا بیان نسبت قطع نموده ایم بر
 که ا: ه: ب: د: ر: و نیز ب: ط: ط = ا: ل: ل: پس گوئیم اند و خط
 ه و و ط متقاطع شوند بر نقطه مثل م و وجهیکه ل: م: ط = ا: ه:

$$ه: ب: و: ه: م: م: و: ل: ل: = ا: ل: ل: = ا: ه: ب: د: ر: و د:$$

برهان چون بر سطح اب د را چنان گذرانیم که مروز کند بر ط: و از نقاط
 ه و ب و د و در خطوط ه و ب و د و د را بموازات ط: رسم کنیم و



نماید آنرا بر نقاط
 ه و ب و د و در نظر
 متوازی ب: ط و ط
 و د این تناسب
 شود ب: ل: ل: =
 ب: ط: ط = ا: ل: ل: =
 پس دو مثلث اب و

م: د: متشابه باشند و بعد ا: ه: ب: د: ر: و د: ر: = ا: ه: ب: د: ر: و د:
 ه: ل: = م: ل: د: ر: یا ا: ه: ب: د: ر: و د: ر: = ا: ه: ب: د: ر: و د: ر:
 این شایب حاصل شود ا: ب: د: ر: و د: ر: = ا: ه: ب: د: ر: و د: ر:

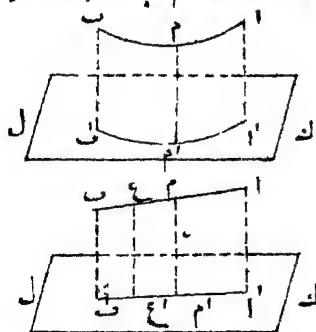
مقاله پنجم

۱۶۲

و چون دو مثلث $ا ب$ و $م$ در قشابه کشیده زاویه $ا ه$ مساوی میشود با $ه د$ پس دو مثلث $ا ه$ و $م د$ در قشابه شوند و زاویه $ا ه$ = $م د$ را پس چنین نتیجه شود که خط $ا م$ را مستقیم است و بنا بر این سه متوازی $ه د$ و $ط$ و $د$ در سطحی واقع شود و آن سطح شامل شود دو خط $ه د$ و $ط$ را پس باید این دو خط متقاطع شوند بر نقطه $م$ و بعد نظر متوازی خطوط $ه د$ و $م$ و $د$ را این تناسب حاصل شود $م : د = ه : د$
 $ه : د = ا : م$ و چون $ا د$ مذکوره را نسبت بخلاف $ا ب$ تکرار کنیم این تناسب حاصل

شود $م : م = ط : ا ه$ و $ه : د$ فصول مطلوب

تعریف موقع عمودی را که از نقطه بر سطحی وارد شود و تصویر آن نقطه کوئیم شد و تصویر خط $ا م$ بر سطح $ل$ عبارت است از خط $ا م$ که مرور نموده بر تصویر است جمیع نقاط خط مفروض



قضیه بیستم

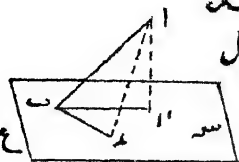
تصویر خط مستقیم بر سطح خطی است مستقیم بر آن چون از نقطه $ا$ از خط $ا ب$ عمودا را بر سطح $ل$ فرود آوریم و بر دو خط $ا ب$ و $ا$ سطحی مرور دهیم تا $ل$ را بر $ا ب$ قطع کند و

از نقطه $ط$ و غیره از خط $ا ب$ عمودا را بر سطح $ل$ فرود آوریم جمیعاً موازی میشوند با $ا و$ واقع میگردند بر سطح $ا ب$ پس ممکن نیست سطح $ل$ را در خارج خط $ا ب$ قطع کنند

قضیه بیست و یکم

زاویه حاده $ا ب$ احاطه نماید بین خط $ا ب$ و تصویرش $ب$ بر سطح $ل$ صغیر است از هر زاویه مثل $ا ب$ که حادث گشته باشد مابین همان خط و خطی دیگر مثل

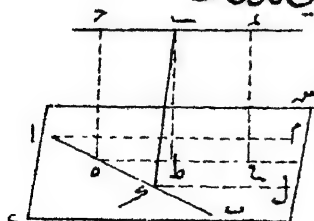
ب م که از موقعش که در سطح رسم شده باشد
بر آنها چون ب م را مساوی ب ا کنیم و ا را اصل
کنیم در دو مثلث اب ا و اب م ضلع اب مشترک باشد
و ب ا = ب م و بیضی استیم ا از مثلث اول
اقصر باشد از ضلع ا م از مثلث دوم چونکه ا عمود است بر سطح مربع و ا م
است پس زاویه اب ا از زاویه اب م



مشرع - چون زاویه حاده حادثه مابین خط فضا و تصویر شدن بر سطح اصغر است
از سایر زوایا پس زاویه منفرجه کم باشد
نظر به حکم مذکور زاویه حاده حادثه مابین خط و تصویر شدن بر سطح مازاویه خط
و سطح کوئیم و نیزه میل خط بر سطح

قضیه بیستم

در دو خط اب و ح غیر واقع در یک سطح کوئیم او که ممکن است عمود
مسترب بر هر دو و آخری نمود ثانیاً پیش از آن یک عمود ممکن نشود که
ثالثاً این عمود اقصر باشد مابین اند و خط



بر آنها اولاً از نقطه مفروضه بر اب خط ام را
بموازات م م رسم میکنیم و بر اب و ام سطح مربع
مرو میسیم و آن موازی باشد با م و از نقطه
مفروضه بر م عمود م م را بر سطح م م می رسم
و از م خط م م را بموازات م م رسم میکنیم و از م خط م م را بموازات م م رسم میکنیم
این خط م م عمود مسترب باشد بر دو خط مفروض زیرا که چون بموازات م م رسم شده عمود

مقاله ششم

۳۴

بر سطح و ۹ و بنابراین برابر و بر ۱۰ و از آن پس بر ۱۱ که موازیت با ۱۰ پس
عمود شد بر ۱۲ و خط
ثانیاً غیر از این خط ۱۰ عمودی مشترک بر دو خط مغرض اخراج نمود زیرا که اگر ۱۰ را عمود کرد
فرض کنیم بر همان دو خط عمود شود نیز بر ۱۰ که موازات ۱۰ در رسم شد پس عمود شود بر سطح ۱۰
و چون ۱۰ ط را موازات ۱۰ فرود آوریم آن نیز عمود شود بر سطح ۱۰ و آنوقت از یک نقطه
دو عمود بر سطح ۱۰ وارد شده

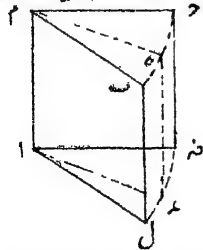
ثالثاً گوئیم ۱۰ اقصر فاصل باشد مابین آن دو خط زیرا که چون ۱۰ را مابین همان دو
وصل کنیم و ۱۰ ط را موازات ۱۰ فرود آوریم خط عمود شود بر سطح ۱۰ و ۱۰ واقع باشد از ۱۰
و ۱۰ ط مساویت با ۱۰ پس ۱۰ اقصر باشد از ۱۰ که فصول المطلوب

در خواص و ایای حاو شده مابین سطوح

تعریف

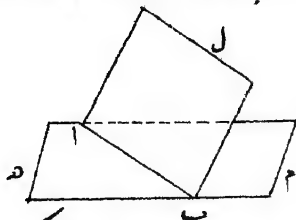
۱- در دو سطح متقاطع مقداری مثل آنرا اندوزانست یکدیگر زاویه و وسطی گوئیم
و فصل مشترک مابین آن دو سطح را خط الواس زاویه و وسطی و یکدیگر از دو سطح را ضلع
انرا زاویه زاویه و وسطی را با چهار حرف بنماییم و حرف بر خط الراس و یک حرف بر ضلع و
در آخر و تغییر و حرف خط الراس در میان قرار دهیم

۲- دو زاویه و وسطی را مساوی گوئیم هرگاه اضلاعشان در یک راست بر یکدیگر منطبق شوند



۳- چون از نقطه ۱ مفروضه بر خط الراس ۱۰
و عمود اند و ال را در دو ضلع زاویه و وسطی ۱
۴- بر خط الراس اخراج کنیم زاویه ۱۰ ال حاو شده
مابین آن دو عمود را زاویه و وسطی بنویسیم یا انرا زاویه

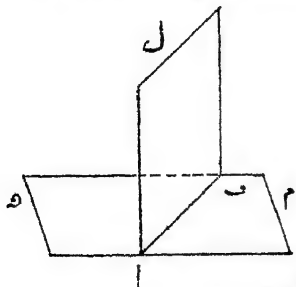
دو سطحی گوئیم و جمع زوایای مستطی که بوجه مذکور در سایر نقاط خط از اس حاد ث شوند مساوی
باشند مثلاً اگر بر سطح م زاویه سطح م ب را رسم کنیم و خط م ح را اند و آنقدر در یک سطح م ح
باشند بر م او متوازی باشند همچنین و خط م ب و ال پس زاویه م ب مساوی باشد با ذل



چون سطح ل ب سطح م را تلاقی کند و زاویه
دو سطحی مجاوره ل ا ب م و ل ا ب نه احداث شود
پس اگر این دو زاویه مساوی باشند سطح ل ب
عمود گوئیم بر م و اندو زاویه دو سطحی را قائمه

و بیاید ثابت که جمع زوایای دو سطحی قائمه مساوی باشند چنانچه عن قریب ثابت کنیم
قضیه بیست و چهارم

بر خط اب واقع در سطح م و سطح ل متوالی سطحی م و ز ا د که عمود شود بر م و بیش
از یک سطح عمود ممکن نیست



نتیجه این شکل آنکه جمع زوایای دو سطحی قائمه مساوی
باشند و بر آن این شکل و نتیجه هر سه همانست که در
شکل اول از مقاله اول گذشت مکرراً در نظر

بر متعلم است اقامدان

ک ۲۵ پنجم و
قضیه بیست و پنجم

ببقایع دو سطح که دو زاویه دو سطحی مجاوره احداث شود که مجموعشان مساوی
باشد با دو زاویه دو سطحی قائمه

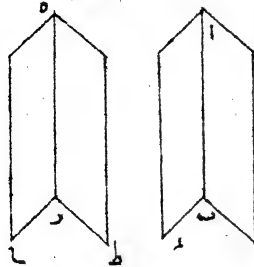
نتیجه چون سطحی عمود شود بر سطح دیگر سطح ثانی نیز عمود باشد بر اول (برجوع کنید به ۳ و ۱)

قضیه بیست و ششم
ک ۲۶

مقاله پنجم

۱۶۶

در دوزاویه دو سطحی متساویه Δ ا ب و ط ه و Δ دوزاویه مسطحه

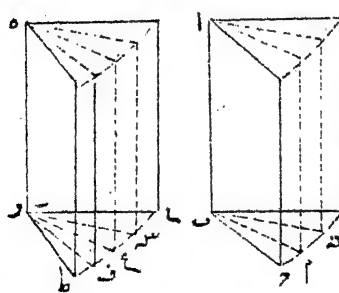


نظیرشان Δ ب و ط و Δ متساوی باشند
بنها زاویه دو سطحی دوم برابر اول نقل میکنم
خارجیه واقع شود بر ا ب و نقطه د بر ب
و سطح ه ر ط برابر Δ ا ب و Δ دوزاویه ه ر ط
و ا ب چون قائم اند خط ر ط واقع شود بر

استقامت ب و و نظیر بناوی و زاویه دو سطحی ضلع ه ر ط منطبق شود بر ا ب
و دوزاویه ه ر ط و ا ب چون قائم اند خط ر ط منطبق شود بر ب و

فقطر - زاویه سطح نظیره زاویه دو سطحی قائم قائم است
زیرا چون سطحی بر سطح دیگر عمود شود دوزاویه دو سطحی مجاوره متساوی شوند پس دوزاویه
انها نیز متساوی گردد چون این دوزاویه مجاوره اند قائم باشند
قضیه نسبت و بقدر

دوزاویه دو سطحی Δ ا ب و ط ه و Δ ب و ط ه و Δ مسطح نظیره Δ ب و ط و



و باشند
بنها فرض میکنیم دوزاویه دو سطحی را
مقیاسی مشترک باشد و مقیاس مثلا
سه مرتبه و در Δ ا ب د بکنجد و چهار مرتبه
در ط ه ر ط پس Δ ا ب د : ط ه ر =

۳ : ۴
حال دو سطح Δ ب و ط و Δ را میگویند بر خط الراس ا ب و ه و آنها خط کنند

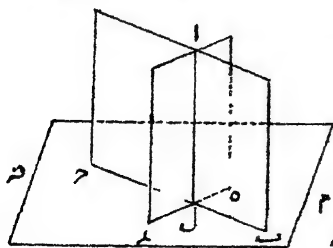
تقیم را برخطوط ب د و ب م و غیره بر خط و د ف و غیره و این خطوط عمود باشند
بر ب ا و د و پس زوایای سطحی حادثه در ب م و م ب د و غیره و طرف و د ف
و غیره چون نظیر اند بازوایای وسطی متساوی باشند و زاویه در ب ا مثل
سه جزء از این اجزا است و زاویه ط ب ا شامل چهار جزء پس در ب ا : ط ب ا = ۴ : ۳
و بنابراین در ا ب ا : ط ب ا = در ب ا : ط ب ا

و اگر دو زاویه مفروضه صم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند باید مانند آنچه را که در
امثال اینجا تذکر شده دلیل گرفت

شرح - بعد از آنچه ذکر شد چون دو نیم زاویه وسطی را تقطیر کنیم نسبتش را با زاویه
د وسطی مقیاس کنیم مثلاً قائم باشد معلوم کنیم کافیت که نسبت زاویه سطحی نظیرش را با زاویه
قضیه ثبوت هشتم

چون خط ال د عمود کنیم بر سطح م د و سطحی مثل ال ب د و این خط گذرانیم
بر سطح غیر عمود شود بر م د

بر همان خط ب د فصل مشترک است مابین دو سطح ا ب د و م د و اگر در سطح م د



خط م د را عمود کنیم بر ب ل خط ال چون

عمود است بر سطح م د عمود شود بر دو خط

و م د و زاویه ال ا قائم باشد و ال بر زاویه

چون حادث شده است مابین دو خط ال اول م

که بر فصل مشترک در دو سطح اخراج شده مقیاس را

و ا ق و مابین دو سطح ا ب د و م د باشند پس این دو سطح عمود باشند بر هدیگر

شرح چون خط ال و ب ل و م ل بر هدیگر عمود شوند هر که در همان عمود باشد بر سطح

مقاله

۱۶۸

خط دیگر سه سطح عمود باشند نسبت به یکدیگر

قضیه بیست و نهم

چون سطح اب عمود باشد بر سطح م د و در سطح خط ل را عمود کنیم بر فصل مشترک ل ب خط عمود شود بر سطح م د
 برهان چون در سطح م د خط ل را عمود کنیم بر ل ب زاویه ال م نظر عمود بودن سطح م د باشد پس خط ال عمود شود بر دو خط ل ب و ل م و بنا بر این بر سطح م د
 نتیجه چون سطح اب عمود باشد بر م د و از نقطه ل مفروضه بر فصل مشترک عمودی سطح م د اخراج کنیم این عمود واقع شود در سطح اب و الا در سطح اب عمود ال را بر فصل مشترک ب ل اخراج کنیم و آن حکم قضیه مذکوره عمود شود بر م د و الوقت از نقطه ل دو عمود بر م د اخراج شده و این خلاف است

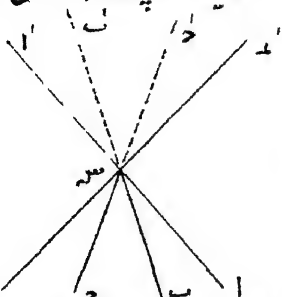
قضیه سی و اُم

چون دو سطح اب و اء عمود باشند بر سطح ثالث م د پس فصل مشترک آنها نیز عمود شود بر این سطح
 برهان چون از نقطه ل عمودی بر سطح م د اخراج کنیم این عمود باید یک مرتبه هم در سطح اب واقع شود و هم در سطح اء پس لابد منطبق شود و خط فصل مشترک آنها

تعریف

- ۱- شکل مرکب از ملاقی چندین سطح مرکب کننده بر یک نقطه را زاویه مجسمه و زاویه کثیر السطح گوئیم
 - ۲- فصل مشترک با هم سه سطح از سطح مذکوره را خط ال اس از زاویه گوئیم و نقطه ملاقی جمع خط ال سه سماره را رأس زاویه مجسمه گوئیم
- و زوایای سطحه حادثه با این سه خط ال اس مجاور را ضلع از زاویه مجسمه گوئیم

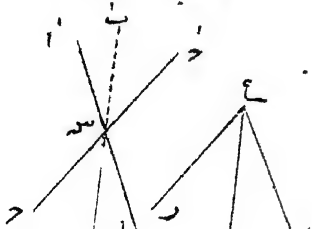
۳- پس اگر عدد ضلع زاویه مجبومه تا باشد از زاویه سطحی و زاویه سطحی کنیم
 ۴- و اینجا بحث ما در زوایای مجبومه است و از زاویه است که چون هر ضلعش را عمدتاً
 تمام زاویه در یک سمت باشد



۵- شکل سرب و د زاویه مجبومه پس اگر
 جمع خط الراسش مساوی سرب و غیره
 درست دیگر نقطه مساوی د و سیم زاویه
 حاد مساوی د را قیاساً زاویه اول کنیم

و ظاهراً است که جمع ضلع و زوایای وسطی این زاویه مجبومه مساوی باشند
 نظیر خود از زاویه اول ولی تکیه منطبق نکردیم چونکه اگر ضلع مساوی را بر مساوی
 منطبق کنیم چنانچه جمع خط الراس مساوی د و زاویه مجبومه یک سمت ضلع مشترک واقع شوند می بینیم که
 از خط مساوی ضلع و زوایای وسطی شانه به یک سمت قرار و زاویه مجبومه واقع گشته اند
 قضیه ششم میگویم

در دو زاویه مساوی چون دو ضلع و زاویه وسطی بین آنها نظیر نظیر متقابل
 باشند اندو زاویه مساوی میشوند



مثلاً ا س د ب = د ع ه و ب س د = د ع ه
 و زاویه وسطی س د ب = د وسطی ع ه و میگویم
 سایر اجزای مساوی باشند

برهان چون ضلع ع ه را بر ا س د ب نقل کنیم نظر مساوی دو زاویه وسطی س د ب و
 ع ه ضلع ع ه را منطبق شود بر ب س د و چون زاویه ع ه را مساوی است با
 ب س د خط الراس ع ه واقع شود بر استقامت س د پس دو زاویه مساوی ضلع

بر منطبق شوند و متساوی کردند
هرگاه اضلاع منظره دو زاویه سه ضلعی نسبت به دو زاویه دو ضلعی متساوی و متساوی
شده باشند زاویه سه ضلعی را باید نقل نمود بر زاویه سه ضلعی که قرینه سواب باشد
قضیه سی و ششم

دو زاویه سه ضلعی هرگاه دو زاویه دو ضلعی و ضلع بین آنها نظیر نظیر و متساوی
باشند آن دو زاویه متساوی گردند

مثلاً اگر $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و دو ضلعی $AB = DE$ و گوئیم سواب
جبری متساوی باشند

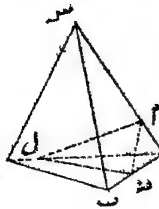
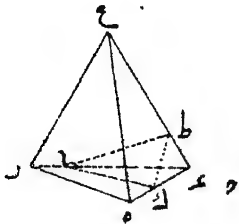
پس چون ضلع AC برابر مساوی DF نقل کنیم نظیر متساوی دو زاویه دو ضلعی
و $\angle C = \angle F$ و دو زاویه سه ضلعی $\angle A = \angle D$ واقع شود بر سواب و ضلع $AC = DF$ بر
سواب پس خط AC به خط DF منطبق شود بر سواب و جمیع اجزای متساوی گردند
اگر زوایای دو ضلعی متساوی و یکس تربیت واقع باشند نسبت به دو ضلع متناظر در منظره
باید زاویه سه ضلعی را نقل نمود بر زاویه که قرینه سواب باشد

قضیه سی و هفتم

دو زاویه سه ضلعی چون اضلاع نظیر نظیر متساوی باشند هر دو
زاویه دو ضلعی مقابل به دو ضلع متساوی متساوی گردند

مثلاً اگر $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و $AB = DE$ و $BC = EF$ و $AC = DF$ و
پس اضلاع متساوی $AB = DE$ و $BC = EF$ و $AC = DF$ و $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و
چون میگویم خطوط AB و DE و BC و EF و AC و DF را وصل میکنیم پس دو
مثلث متساوی الساقین سواب ABC و DEF چون دو ضلع و زاویه بین آنها متساوی

متساوی باشند و همچنین دو مثلث س د ب ح و ع ه ر و نیز دو مثلث س د ا
و ع م ر و از تساوی این مثلثات دو مثلث ا ب ح و ع ه ر متساوی الاضلاع گردند
و متساوی



بعد از این مقدمه از نقطه م مفروضه بر خط
الراس س د ا و در دو ضلع س د ا ب و م د
س د ا دو عمود م د و م ل را بر خط
ا ب و ل می کشیم و این دو باید متساوی کنند

دو ضلع ا ب و ا د را چونکه دو مثلث س د ا ب و س د ا ح متساوی است پس
و بنا بر این دو زاویه قائمه س د ا ب و س د ا ح داده اند و بعد خط د ل را وصل کنیم
حال م ط را مساوی م ل می کشیم در سه ضلعی دویم عمل مذکور را تکرار می کنیم
پس دو مثلث قائم الزاویه م ا د و م ط ک چون ضلع م ا د = م ط و زاویه حاده
م ا د = م ط ک این دو مثلث متساوی باشند و ضلع ا د = م ک و م د = ط ک
و همچنین ثابت می کنیم که م ل = ط ح و ا ل = م ح

و نیز دو مثلث ل ا د و ح م ک چون دو ضلع و زاویه بینشان متساویست
پس ضلع ل ا د = ح م و بنا برین دو مثلث د م ل و ح م ط سه ضلعشان نظیر
متساوی باشند پس زاویه د م ل که معیاس زاویه دو سطحی س د ا است متساوی باشد
با زاویه ح م ط که معیاس زاویه دو سطحی ح م د است
شرح - هرگاه علاوه بر حکم قضیه دو زاویه مجمله ضلع متساوی متشابهه الوضع باشند
اندو زاویه متساوی گردند بر هر منطبق شوند و الا قرینه همدیگر باشند

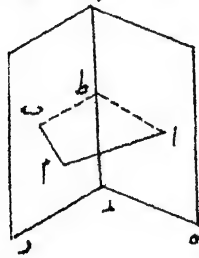
قضیه سی و چهارم

مقاله پنجم

۱۷۲

اولاً هر نقطه واقع بر سطح منصف زاویه دو سطح بیک فاصله باشد
از د ضلع از زاویه و ثانیاً هر نقطه واقع در درون از زاویه ولی در خارج
سطح منصف از زاویه مختلفه البعد باشد از آن دو ضلع
برها این حکم شبیه است آنچه در ۲۱ ذکر شد و اقامه اش بخاطر عمده متعلم
نیست. در هر زاویه سه سطح منصفه زوایای وسطی بر یک خط مستقیم تقاطع شوند
قضیه ششم فی الجمله

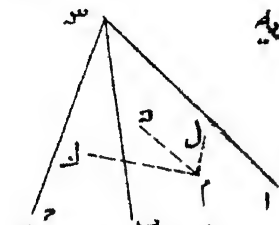
چون نقطه در درون زاویه دو سطحی فرض کنیم و از آنجا دو عمود م
و م ب را برد و ضلعش فرو آوریم زاویه ا م ب حادثه مابین اند
عمود م کمال باشد زاویه دو سطحی مفروض را
برها - سطح ا م ب عمود است بر دو ضلع د و و
د و و از آن پس فصل مشترک د و پس دو خط
ا ط و ب ط فصل مشترک مابین سطح و د و ضلع
زاویه مفروضه عمود باشند بر د و و زاویه ا ط ب
مقیاس زاویه دو سطحی باشد و چون در ذوار بعد اضلاع م ا ط ب و زاویه ا و ب
شد پس $ا م ب + ا ط ب = ۲$



بقیه - اگر زاویه دو سطحی مفروضه منفیه باشد ممکن است در بعضی حالات بحسب وضع
نقطه م موقعی عمودیکه بر یکی از دو ضلع فرو آید امتداد آن سطح را ملاقی کند و قعش
در خارج زاویه افتد ولی دلیل نگویم بر این حالت نیز تعلق گیر و بنا بر آنکه ملاحظه کنیم که جمیع
زوایا اینکه باختلاف موضع نقطه م حادث شوند چون اضلاعشان متوازیست
متساوی باشند پس نقطه م را بر سطح منصف از زاویه فرض میکنیم و در این صورت

موقع دوم و در این نقطه بر دو ضلع در داخل زاویه افتند و دلیل مذکور را باین
 کید و حکم کلی است پس باین موضع مخصوصی از آن نقطه ندارد
قضیه ششم و ششم

چون از نقطه م فاصله در درون زاویه سه سطحی سه عمود هجا
 م ل و م ک و م ن را بر اضلاع اس ب و ب س و اس و اس و ا و ب
 از ترکیب اینها زاویه سه سطحی دیگر حاصل شود که اضلاعش مکمل
 دو سطحی اول باشند و بالعکس اضلاع زاویه



اول مکمل زوایای دو سطحی دوم باشند
 بر آنها بنا بر شکل سابق زاویه ل م ن حادثه بین
 دو خط م ل و م ن که عمود بر دو ضلع اس ب و
 اس و اس و ا و ب باشد و همچنین زاویه ن م ک مکمل دو سطحی س ب و
 زاویه ل م ک مکمل زاویه دو سطحی س ب

و در اثبات حکم ثانی اول باید دانست که تغییر موضع م در زاویه مجبیه
 م ل ن تغییر نکند چونکه اضلاع جمیع زوایای سه سطحی که تغییر مکان آن نقطه حادث شود
 متساوی باشند و متشابه بالوضع

بعد از این مقدمه چون سطح ل م ن عمود است بر دو ضلع اس ب و اس و اس و ا و ب
 بر فصل مشترک آن س ا پس عکس این خط عمود شود بر این سطح و همچنین س ب عمود باشد
 بر سطح ل م ک و س و اس بر سطح ن م ک و بالجمله اگر نقطه م را بر خط منصفه زوایای
 دو سطحی س ا و س ب و س و اس فرض نماییم مواقع اعده م ل و م ن و م ک واقع
 میشوند در درون زوایای اس ب و اس و اس و ب س و ب س و ب س در درون

مقاله پنجم

۱۷۴

زاویه سه سطحی $ل م ن$ که می باشد و چون خطوط $ل م$ و $ل ن$ و $م ن$ و $س$ هم بوده اند
بر اضلاع $ل م$ و $ل ن$ و $م ن$ که پس بنا بر جزو اول قضیه زوایای $ا س ب$
ب $س$ و $ا س ج$ ممکن باشند زوایای وسطی $م ل$ و $م ن$ و $ل م$ را

قضیه ششم هفتم

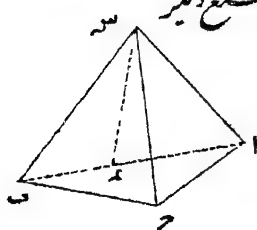
هرگاه دو زاویه سه سطحی زوایای وسطی متساوی باشند
اضلاعشان نیز متساوی گردند

برهان فرض میکنیم $س$ و $س$ دو زاویه سه سطحی مذکور باشد و $و$ و $و$ دو زاویه سه سطحی
کماشان چون زوایای وسطی $س$ و $س$ ب فرض متساوی هستند بکم شکل سابق
اضلاع دو زاویه سه سطحی $و$ و $و$ متساوی گردند و از آن پس بنا بر جزو اول
سطحشان متساوی شوند و چون این زوایای وسطی دو زاویه سه سطحی $و$ و $و$ متساوی
گشت اضلاع دو زاویه سه سطحی $س$ و $س$ متساوی شوند

مشترک هرگاه اضلاع متساویه دو زاویه سه سطحی متساویه باشند نیز زاویه
متساوی گردند و برعکس منطبق شوند و آتاقربیه هم باشند

قضیه هفتم هشتم

در زاویه مجتمعه سه ضلع مجموع هر دو ضلعش اعظم باشد از ضلع سیم
این حکم وقتی بران خواهد که ضلع سیم اعظم باشد از هر کدام از دو ضلع دیگر

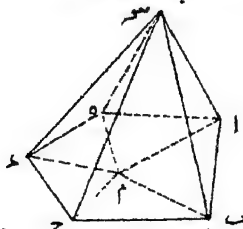


مثلاً زاویه مجتمعه $س$ مرکب است از سه ضلع $ا س ب$
و $ا س ج$ و $ب س ج$ و ضلع $ا س ب$ اعظم است از هر
که ایشان میگوئیم $ا س ب > ا س ج + ب س ج$
برهان در سطح $ا س ب$ زاویه $ب س ج$ را مساوی $ب ج$

جد میکنیم خط ادب را وصل میکنیم سده را مساوی سده جد میکنیم و دو خط اد و ب
را وصل میکنیم در دو مثلث ب سده و ب سده ضلع ب سه مشترک است و سده
= سده و زاویه ب سده = ب سده پس این دو مثلث متساوی باشند و ب سده
شود با ب و در مثلث اب د ضلع اب د اد + ب د چون ب د را از طرفی
وضع کنیم و ب د را از طرفی باقی میماند اد د حال در دو مثلث اسده و اسده ضلع
اسده مشترک است و سده = سده و ضلع دیگر اد د پس زاویه اسده کوچکتر باشد
اسده و چون بر طرفین دو زاویه متساویه ب سده و ب سده را اضافه کنیم چنین نتیجه شود
اسده + ب سده یا اسده د اسده + ب سده

قضیه سی و نهم

مجموع اضلاع هر زاویه مجتمعه محذبه اصغر است از چهار قائمه



برهان بر زاویه مجتمعه سه سطح اب د و د ب ا و ا ب سده را چنان
میکذاریم که مجموع خط الی سه را قطع کند و از نقطه
م مفروضه در این سطح خطوط م ا و م ب و م د و م
و م ه را بجمع زوایا وصل میکنیم

پس مجموع زوایای مثلثات اسده و ب سده و غیره که حول نقطه سده دور اند
مساویت با مجموع زوایای مثلثات م ب و ب م د و غیره که حول نقطه م دور اند
و عددشان برابر مثلثات اول است و در نقطه ب مجموع دو زاویه اب م و م ب د یعنی زاویه
اب د اصغر است از مجموع دو زاویه اب سده و سده ب د و همچنین بر نقطه د مجموع دو زاویه
د م + م د اصغر است از ب د سده + سده د و کذا در سایر زوایای کثیر الاضلاع
اب د و بنا بر این مجموع زوایای قواعد مثلثاتی که حول نقطه م دور زده اند اصغر است

از مجموع زوایای قواعد مثلثاتی که روشن بود واقع است پس مقابله مجموع زوایای
حول نقطه م اعظم است از مجموع زوایای حول نقطه سه و مجموع اول چهار قائمه است
پس مجموع اضلاع زاویه محبوسه که برابر باشد از چهار زاویه قائمه

قضیه چهارم

در هر زاویه سه سطحی اولاً مجموع زوایای دو سطحی که در آن باشد
دو قائمه و شش قائمه و ثانیاً چون هر کجکترشان دو قائمه بیشتر
بزرگتر باشد از مجموع دو زاویه دیگر

برهان - اولاً فرض کنیم α و β و γ زوایای دو سطحی باشد از زاویه سه سطحی و δ
و ϵ اضلاع زاویه سه سطحی که باشد

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \epsilon + \zeta = 180^\circ$$

و چون این سه تساوی را با هم جمع کنیم چنین شود $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$

و مجموع $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta = 540^\circ + 180^\circ = 720^\circ$ اعظم است از نصف و هفتاد و چهار قائمه پس مجموع

$\alpha + \beta + \gamma$ کوچکتر باشد از $\delta + \epsilon + \zeta$ قائمه و بزرگتر از 2 قائمه

ثانیاً - چون α و β و γ زوایای دو سطحی فرض شده اند از زاویه سه سطحی و δ کوچکتر

باشد از ثانیاً آنوقت $\alpha + \beta + \gamma < \delta + \epsilon + \zeta$ و اضلاع زاویه سه سطحی که باشد

و $\alpha + \beta + \gamma$ اعظم باشد از ثانیاً پس

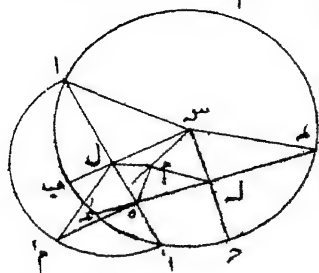
$$\alpha + \beta + \gamma > \delta + \epsilon + \zeta$$

و چون بطرفین $\delta + \epsilon + \zeta$ را اضافه کنیم و $\alpha + \beta + \gamma$ موضوع نمائیم چنین شود

$$\alpha + \beta + \gamma > \delta + \epsilon + \zeta$$

قضیه پنجم

شرط واجب و کافی در امکان ترکیب زاویه مجتبه سه سطحی از سه
ضلع مفروضی است که مجموع سه ضلع کوچکتر باشد از چهار زاویه
قائمه و بزرگتر آنها کوچکتر باشد از مجموع دو زاویه دیگر
برها و جوب و شرط مذکور را سابق میسر نموده ام و اکنون باید در کفایت آنها بنمیشم



فرد میاوم و چون ناوید بسره اعظم فرض شده قوس ب و بزرگتر باشد از
کدام از دو قوس ب ا و د و چون ب ا = ب ا نقطه ا باید فیما بین ب و
واقع شود و همچنین نقطه ا و ب فرض ب س د و اس ب + د سه پس ب د ا ب
+ د و چون ب ا د ب ا و د = د پس نقطه ا واقع شود در بین ا و د قوس
ب و ب با جمله چون مجموع ضلع را از ع قائمه گوچکتر فرض نموده ایم نقطه
باید محیط ابتدا از ب و در جهت سهم در بین ا واقع شود و بنا بر این دو ترا ا و د
در درون دایره متعلق کردند

بعد از این مقتضای نقطه عموده م را بر سطح ب سه اخراج میکنیم و در سطح آن
از مرکز ل و بشعاع ل ا دایره رسم میکنیم م را بر نقطه قطع کند و م سه را وصل
میکنیم و میگوئیم سه ب م زاویه سه طحی مطابق باست
برها چون م ل و م ک را وصل کنیم و مثلث سه ل و م ل سه قائم الزاویه است

برل و سول در هر دو مشترک است و $ال = ل م$ پس متساوی باشند و زاویه اول
 $= ل س د م$ و همچنین دو مثلث قائم الزاویه $ح س ل$ و $د س ل$ نظایر باشند
 پس $ل س د$ و $ل س د$ متساوی باشند پس $م س ل = د س ل$
 بقیله بعد از آنچه ذکر شد ظاهر است که چون بر قطر $ا ا$ و مرکز $ل$ نصفه
 ام $ا$ را رسم کنیم و از نقطه $ه$ عموده $م$ را بر قطر $ا ا$ کنیم تا محیط منتهی شود
 و $ل م$ را وصل کنیم زاویه $م ل ه$ مقیاس زاویه $د و س ل$ $ح س د$ با
 و مانند آن میسر می توان مقیاس و زاویه دیگر را بدست آورد
 شرح چون $ا$ سیم زاویه $د و س ل$ $ح و د$ زاویه $م ل ه$ ترکیب کنیم شرط
 واجب کافی همین است که مجموع آنها واقع باشد باین ۲ قائمه و $ع$ قائمه و کوچکتر
 شان باشد ۲ قائمه اعظم باشد از مجموع $د و د$ زاویه دیگر
 و جواب این شرط مبرهن شده و حال گوئیم کافی باشند زیرا که در صورت
 حفظ این دو شرط میتوان با ضلع $م ه$ $ح و م$ $د و م$ $ه$ زاویه سه سطحی را
 ترکیب کرد و بعد از ترکیب آن معلومست که کماتر زاویه سه سطحی است مرکب از
 سه زاویه $د و س ل$ $ح و د$ و $ه$

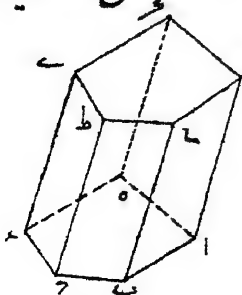
مقاله ششم در خواص اجسام کثیره السطوح تقریفات

اول جسم کثیر السطوح آنست که از اطراف محدود باشد بطوح مستویه و است
معلومست که آنطوح منتهی می شوند بخطوط مسیقه و ما این اجسام را بیشتر کثیر السطوح گوئیم
و به تفصیل چهار سطحی جسمی است محدود بچهار سطح مستوی و شش سطحی جسم
شش فاعده است و هشت سطحی صاحب هشت فاعده و یک دوازده سطحی
بست سطحی و غیره

از جمله اجسام کثیر السطوح چهار سطحی از همه ساده تر و محضه تراست زیرا که در هر
زاویه محتمله قلاسه سطح لازمست چون زاویه ترکیب شد فضائی غیر محدود دارد که قلا
با یک سطح دیگر محدود و محصورش نمود

۲- فصل مشترک ما بین هر دو سطح مجاور از اجسام کثیر السطوح را خط اکرانس گوئیم
۳- کثیر السطوح منظم آنست که جمیع اضلاعش کثیر الاضلاع منظم باشند
و جمیع زوایای مجامعش مساوی عدد این نوع پنج است (بعوض کینه یضیمه مقاله ششم و هفتم)

۴- منشور منتهی است محصور ما بین چندین سطح متوازی الاضلاع که از طرفین منتهی
باشند و سطح کثیر الاضلاع مساوی و متوازی

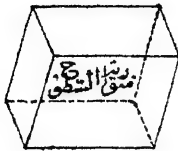


در ترکیب چنین جسم کثیر الاضلاع ابداع ده را
بر سطحی رسم میکنیم و در سطحی دیگر موازی آن خطوط بده
ط و ط و غیره را مساوی موازی اضلاع
ا ب و ب و د و غیره طرح میکنیم تا کثیر الاضلاع

- ب- ط- که ترکیب شود مساوی اب حده حال چون ما بین دو سطح رؤس و ایای
مناظره را بخاطر ادوب و دوط و غیره وصل کنیم سطوح اب و د و ب و د و غیره
متوازی الاضلاع میشوند و چنین جسم مرکب اب حده ر- ط- که منشور مطلوب است
۵- دو کثیر الاضلاع متساوی متوازی اب حده و ب- ط- که را در دو قاعده منشور
کوئیم و ترکیب یا سطوح متوازی الاضلاع را سطح طرف و سطح محاذ منشور کوئیم
و خطوط مستقیم ادوب و دوط و غیره را اضلاع منشور
۶- امری که منشور فاصله ما بین دو قاعده و است بعبارت تخری طول غرض است
از یک نقطه قاعده علیا بر سطح قاعده سفلیش فرود آید
۷- منشور قائم آنست که اضلاع ادوب و دوط و غیره عمود باشند بر سطح قاعده و
درین صورت هر که ایشان ارتفاع منشور شود و در غیر این صورت منشور را مائل
کوئیم و ارتفاعش قصر باشد از طول ضلع
۸- منشور را بحدی که ایای شکل قاعده اش که مثلث باشد یا ذو اربعه اضلاع یا دوجنسه
اضلاع یا ذو سته اضلاع و غیره مثلث القاعده کوئیم و مربع القاعده و مستطیل
القاعده و مستطیل القاعده و غیره
۹- منشوریکه قاعده اش متوازی الاضلاع باشد جمیع سطوحش متوازی الاضلاع
شود درین صورت آنرا متوازی الاضلاع کوئیم
جسم متوازی الاضلاع هرگاه خط الارتفاع عمود باشد بر قاعده آنرا متوازی الاضلاع قائم کوئیم
و اگر عمود بر آن قاعده اش معین باشد یعنی مربع مستطیل آنرا متوازی الاضلاع المستطیل
قائم الزاویه کوئیم یا مکعب مستطیل
۱۰- از جمله کجاست مستطیل مکعب است که شش سطحی منتظم نیز کوئیم و این است

محدودش بر منب مساوی

۱۱- جسمی را که ترکیب شود از دو جبریل نقطه فضائیه سه مجموع رؤس کثیر الاضلاع سطح
بحدده مخروط مضلع و هرم کوئیم سه ۳۹



کثیر الاضلاع ابحدده را قاعده هرم کوئیم و نقطه
سه را رأس و مجموع مثلثات اسوب و اسوب

و غیره را سطح محدب و سطح طرف هرم

۱۲- ارتفاع هرم عمودیت که از رأسش و دایر بر سطح قاعده اش

۱۳- هرم را محب آنکه قاعده مثلث باشد یا ذواربضلع و غیره مثلث

القاعده کوئیم و منب القاعده و غیره

۱۴- هرم را منتظم کوئیم هرگاه قاعده اش کثیر الاضلاع منتظم باشد و عمود
از رأسش متی شود بر مرکز قاعده و در این صورت عمود مذکور را سهم و محب هرم کوئیم

۱۵- قطر هر خطی است داخل مابین دو رأسش او یعمد غیر مجاوره

ع- سطح محدب یا سطحی است منحنی یا مرکب از اجزای مستویه بود چنانکه چون هر نقطه اش

سطحی مستوی مروزیم اخط بر یک طرفش افتد

اجسام کثیره الطوجی که منظور واریع می باشد چنانکه چون هر کدام رسطوحشان است

و هم تمام جسم یکطرفش افتد پس سطح چند کثیره الاضلاع محدب است

قضیه اول

دو کثیر الطوج محدب هرگاه دو دو رؤس مشارک باشند البته هر دو منطبق گردند

برهانی یکی از این دو جسم را فرض کنیم سطح جانبی آن را بر روی کثیر الطوج دیگر قرار

گیریم که با آن در رؤس مشارک باشد پس هر دو را با دایره متحد نموده و باید سطوحش هر دو یکدست و جمعاً برابر

تثبیت

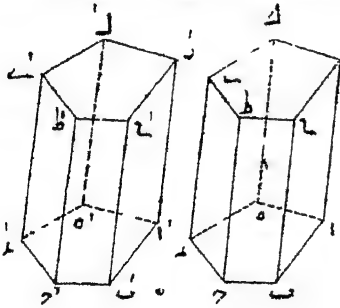
نام هرم از زبان
مشابه شکل این است
با هرم مصر



همان نقاطیکه در جسم اول سطوح گذشته اند و الا اختلاف باین این دو جسم پیدا نشود و متحرک گردند
ولی ظاهر است که بنا بر این شرط بعضی سطوح جدید که اکثر سطوح اول را قطع کنند و آنوقت
روشن چند در یک طرف آن سطوح افتد و روشن چند در طرف دیگر و این وضع در اکثر سطوح
محدب پسندیده نیست پس اگر دو اکثر سطوح در روشن مشارک باشند بی کم و زیاد
البته برهم منطبق گردند

قضیه دوم

دو منشور متساوی باشند هرگاه سه سطح محیط بر زاویه مجتمعه یکی نظیر
مساوی باشند بآسه سطح محیط بر زاویه مجتمعه دیگر و مقصود از تناظر
آنستکه متشابه الی وضع باشند



مثلاً قاعده $ا ب ج د ه$ مساویت با
ا $ا ب د ه$ و متوازی الاضلاع $ا ب ج د$ و
مساویت با $ا ب د ه$ و متوازی الاضلاع
 $ب ج د ه$ مساویت با $ب ج د ه$ و یکو
متوازی $ا ب ج د ه$ مساویت با $ا ب ج د ه$

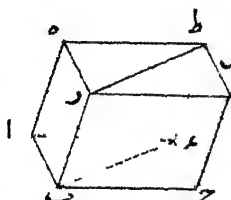
برهان - چون قاعده $ا ب ج د ه$ را بر مساوی $ا ب د ه$ نقل کنیم درست بر طبق شود
و بنا بر فرض سه زاویه سطحیکه مجتمعه را در یکپ میکنیم نظیر فرض مساوی باشند باز زاویه سطحیکه
زاویه مجتمعه $ب$ را در یکپ میکنند باین ترتیب $ا ب ج د ه = ا ب د ه = ا ب ج د ه$ و $ا ب ج د ه = ا ب ج د ه$
 $= ا ب ج د ه$ پس این زاویه مجتمعه متساوی باشند و بنا بر این ضلع $ب ج$ واقع شود در مسطح
 $ب ج د ه$ و نیز نظر مساوی دو متوازی الاضلاع $ا ب ج د$ و $ا ب د ه$ ضلع $د ه$ واقع و منطبق
شود بر مساوی $ا ب د ه$ و همچنین $ا ب ج د ه$ بر $ا ب ج د ه$ پس قاعده علای $ا ب ج د ه$ مساوی

واقع شود بر مساوی خود یا ط و د و وجه زوستان شکر می شود و بنا بر این حکم

جسم واحد می کنند

نتیجه - دو منشور قائم که قاعده و ارتفاعشان مساوی باشند متساوی هستند
زیر که چون سطح اب مساوی باشد با اب و ارتفاع ب ب است پس سطح اب ب در
مساوی شود با سطح اب ب و همچنین است حکم در دو سطح ب ب ط و ب ب ط
و بنا بر این سطح محیط بر زاویه مجتبه مساوی شد با نظایر خود از زاویه مجتبه ب پس منشور
متساوی می شوند

قضیه ششم



در جسم متوازی الاضلاع متقابل که متساوی و متوازی باشند

برهان - بنا بر تعریف (۹) دو قاعده اب د و ه ب ط و د و

متوازی الاضلاع متساوی الاضلاع متوازی پس برهان

باید در هر دو سطح مقابل طرف قائم نمود مثل اه ط و ب ب ح و پس شکل اب د و چون متوازی

الاضلاع است ا د مساوی و متوازی باشد با ب ح و همین دلیل اه مساوی و متوازی باشد

با ب و پس زاویه ماه مساوی با ح د و ماه و سطح ماه متوازی با ح د و پس

متوازی الاضلاع ماه ط مساوی شد با ح ب و همین جهت ثابت می شود که دو منشور

الاضلاع متقابل اب و ه و د و ط و مساوی و متوازی باشند

تفصیل - چون متوازی الاضلاع جسمی شد محدوده سطحی که هر دو نامی متقابل با هم متساوی

و متوازی می شد میتوان بر سطح با با مقابل آن دو قاعده چنین حکم گرفت

شکل - چون سطح معلوم اب و اه و د و بر نقطه ا متقاطع گشته شد و زوایای سطحی معینه ما

انها حادث شده باشد میتوان بر آنها متوازی الاضلاع متشکل طرح نمود و باین وجه که بر طرف هر یک

از این خطوط سطحی موردی هم موازات سطح دو وسط دیگر مثل بر نقطه سطح موازات نه اه و نقطه سطح موازات باه و بر نقطه سطح موازات باه این سه سطح متلاق شوند و باشد سطح متوهم از سه خط مفروض کل مطلوب ترکیب شود

قضیه چهارم

در جسم متوازیه النطاق اقطار بر یک نقطه متقاطع شوند و منصفه یکدیگر باشند
برهان در شکل سابق و قطره د و ا را مین بردور نس متقابل وصل میکنیم پس چون اه مساوی موازیت با ح شکل اه د متوازی الاضلاع باشد و و قطره د و ا را بمیدیکر انصف کنند و بهمین وجه ثابت میشود که قطره د و و قطره دیگر را نیز بمیدیکر انصف کنند پس چهار قطر در نقطه متقاطع شوند و اینجا بمیدیکر انصف کنند آن نقطه را میتوان مرکز متوازیه النطاق خواند



قضیه پنجم

هر منشور مثل اب د را چون دو سطح متوازی قطع کنند و مقطع حادث ن م ل شود و سطح صده دو و کثیر الاضلاع متوازی باشند که بر آنها دو ضلع د م و س ع چون فضیل مشترک این دو سطح متوازیید و سطح ثالث اب د و متوازی باشد

و چون واقع باشند باین دو ضلع متوازی د م و س ع فشریس مساوی باشند و بهمین دلیل اضلاع م ل و ل شه و غیره از مقطع د م ل شته ت بر ترتیب مساوی باشند با اضلاع ع ف و ف ص و غیره از مقطع س ع ف صده و چون اضلاع مساوی مذکور در این هشتادین و یای د م ل و م ل شه و غیره از مقطع اول بر ترتیب مساوی باشند باز وای

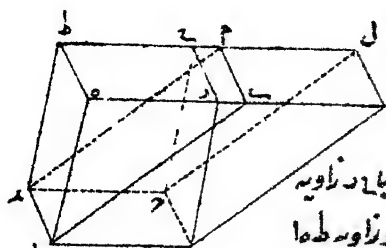
برهان - چون این دوشو مشرکند و برخواب رسد و بعد از وضع این دو باقی میماند
و جسم باطل و دم و لیس و باید ثابت گیرم حساوند

در دو متوازی الاضلاع $ABDE$ و $ACDF$ دو ضلع AE و CF چون مساوی شد
 باموازی خود AB و CD مساوی باشند و بعد از وضع مشترک AD باقی میماند $BD = AC$
 و همین وجه ثابت می شود که $AD \perp BC$

حال بسیل انطباق جسم دومه طه سه رفقل میکنیم بر ب- اءل و اول قاعده دومه
را قرار میدهم بر مساوی خود ب- ل و آنوقت نقطه م واقع شود بر ب- و نقطه سه بر ل و
ضلع م و سه ط بر مساوی خود- اوله چونکه نیمه عمود بر سطح ب- ل پس این دو
برهیکه بر سطحی شوند و بنابر این منشور را مثل باءه طه معادل باشد با منشور قائم ب- ل دوم سه
و همین وجه ثابت شود که منشور را مثل ب- د و ط معادل باشد با منشور قائم ب- ل
و د و منشور قائم ب- ل و د سه و ب- ل در د و مساوی باشند چونکه بر دو برابر ارتفاع و
و دو قاعده آنها ب- ل و ب- ل هر کدام نصف متوازی الاضلاع است پس منشور
مثلث القاعده باءه طه و ب- د و ط معادل شدند با منشور مساوی بنابر این معادل
نتیجه- هر منشور مثلث القاعده مثل ا ب د و ط نصف متوازیه السطح ا ب د است که
بها نزاع و محتمله او همان خط الراسهای ا ب و ا د و ا ه باشد

قصہ ہفتہ

هرگاه دو متوازن را بطوری که وال مشترک باشند در قاعده ای حدود و
قاعده علیا شان هـ ط و ل م در یک سطح باشند و پایین دخی
متوازی هـ ک و ط ل پس متعادل شوند
این شکل سه حالت دارد بحسب آنکه هـ بزرگتر باشد از د یا کوچکتر یا مساوی آن و بس



و پس در هم یکیت و اول گوئیم منشور

مثلث القاعده ا-ب-ط م مساوی

با منشور مثلث القاعده ب-د-ح ل

برهان چون ا-ه موازیت باب و ط-ه با-د زاویه

ا-ب-ط = ب-د-ح زاویه ط-ه = د-ح-ا زاویه ط-ه

= ب-د-ح از این شش زاویه سه تا می یکند زاویه مجتمعه را و سه تا می قویم زاویه

مجمعه را و چون از نوایای سطحی نظریه نظیر متساویند و زاویه مجتمعه کوره متساوی کردند

حال چون منشور ا-م را بر منشور ب-د-ل نقل کنیم اول قاعده ا-ب-ط را قرار دسیم بر ب-د-ل

این ج-و قاعده چون متساوی باشد بر هم منطبق شوند چون دوزاویه مجتمعه و در متساوی شده

بودند ضلع ه-ط منطبق شود بر مساویش د-ح و در وقوع انطباق و منشور پیش از این شرط

لازم نیست چونکه بقاعده ا-ب-ط و خط الراس ه-ط منشور ا-م صورت بندد همچنانچه بقاعده

ب-د-ل و خط الراس ب-د منشور ب-د-ل پس این دو منشور متساوی کردند

حال چون از تمام جسم ال مرتبه موضوع کنیم منشور ا-م را و مرتبه منشور ب-د-ل را باقی

منشور متوازی السطوح ا-ب-ط و ا-ب-د-ح پس این دو متساوی باشند

قضیه هشتم

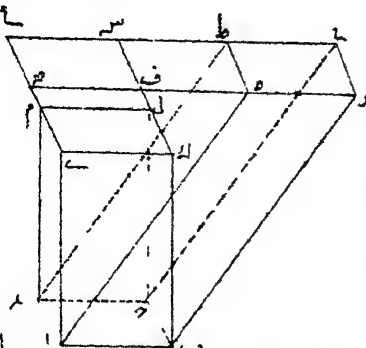
هر دو متوازی السطوح که بر قاعده واحده و بر ارتفاع واحد باشند متعادلی کنند

قاعده ا-ب-ح و متوازی السطوح ا-ب-ط و ا-ب-د-ح و چون بیک ارتفاع عند

دو قاعده عیالشان ه-ط و د-ح مساوی در یک سطح واقع شوند و علاوه بر آن و ضلع ه-د

و ا-ب متساوی متوازی میباشند همچنین ل-د و ا-ب پس ه-د و مساوی و متوازی شود

با ل-د و بمقتضی این دلیل ه-د و مساوی متوازی شود با ل-د و حال و ضلع ه-د و ط-ه



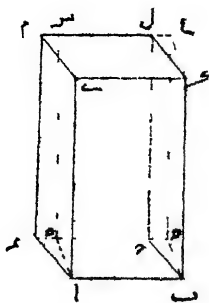
از طرفی امتداد می‌دهیم و دو ضلع که
و م را از طرفی دیگر تا مقابل یکدیگر
و بر نقاط فصول مشترکه صورت دهیم
متوازی الاضلاع ده فاصله را
است که این شکل مساوی باشد با هر کدام از
دو قاعده ه و ط و ک ل م و

چون متوازی السطوح ثالثی متوکلیم بر قاعده سفلی ای اف ج و علیای ده ف و ه معادل
شود با متوازی السطوح ای چونکه بر قاعده سفلی واحد اند و قاعده علیا شان در یک سطح اند
و ما بین دو خط متوازی ای و د و همین دلیل همان متوازی السطوح معادل شود با ال پس
دو متوازی السطوح ای و ال که بر قاعده وارثا و واحد می‌باشند متعادل باشند

فصل پنجم

هر متوازی السطوح را می‌توان به یک مستطیل متعادل یکبار ارتفاع
آن باشد و قاعده اش معادل باشد با قاعده آن

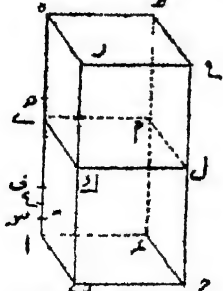
در شکل سابق ای متوازی السطوح مفروض است و از نقاط ا و ب و ج و د خطوط
ا ب و ب ک و ج ل و د م را عمود می‌کنیم بر سطح قاعده و منتهی می‌نماییم بر سطح قاعده علیا
تا متوازی السطوح ال ترکیب شود آن معاد است با ای و سطوح اطرافش ال و ب ل و ج و د
مربعات مستطیل اند پس اگر قاعده ای ج د نیز مربع مستطیل باشد ال مکعب مستطیل می‌شود
معادل متوازی السطوح مفروض ای و اگر ای ج د مربع مستطیل نباشد و ب د
را عمود می‌کنیم بر ج د و ه و د را بر سطح قاعده تا مکعب مستطیل ای د ه و ب ک
ای د ه مرکب شود



برونها بعض قاعده اب ده و مقابش سطح سز
مستطیل اند و سطوح اطراف نیز می باشد زیرا که خط الزا
ا و ه س و غیره عمود اند بر سطح قاعده پس ا و ه مکعب مستطیل
و اما می توانیم دو متوازیه سطوح ا و ال را مشترک فرض کنیم
در قاعده اب ل و در ارتفاع ا ه پس این دو متعادل
باشند پس متوازیه سطوح ا و ال (مثل سابق) که اولی
شده بود بحجم معادل ال نوبت دیگر شد بل که مکعب مستطیل معادل ا و ه که با ارتفاع ا
است و قاعده اش ا و ه معادلت با قاعده اب و ه

قضیه هندس

دو مکعب مستطیل ا و ال که بر قاعده واحد اب و ه باشند بقسما
د و ارتفاع ا و ال است



برونها فرض میکنیم و ارتفاع ا و ال بر نسبت دو عدد
۱۳ و ۷ باشند و ۲۰ را برابر ۱۳ جزو مساوی قسمت کنیم
و ا و ال شامل ۷ جزء آنها شود و بر نقاط قسمت سه و و و
ف سطوح مستویه موازات قاعده می کشیم بر این مینماید
جسم ا و ال را بر ۱۳ مکعب مستطیل جزء قسمت کنند و اینها مساوی باشند چونکه بر قاعده و ارتفاعات
مساوی اند و موازات قاعده نظر باشد که هر مقطع مثل م ل ل که در منشور موازات قاعده باشد
اب و ه احداث شود مساوی است با این قاعده و ه و مساوی ارتفاعات بسبب است که اجزا
همان قسمتهای مساوی و سه و و ف باشند و چون از این ۱۳ مکعب مستطیل مساوی
در ال محتویست پس نسبت جسم ا و ال بحجم ال مثل ۱۳ باشد به ۷ مثل ارتفاع ا و ال

بارشاع ۱-

و اگر دو ارتفاع $اه$ و $اب$ اصم باشند با یطریق و $ا$ ثابت نبود که این نسبت مطلقاً مستقیم
 بقینه در مکتب مستطیل که $د و د$ سه خط الرأس مجاورش باشند و یکی از آنها ارتفاع
 بگیریم و توانی دیگر دو بعد قاعده اش باشند

قضیه یازدهم

هرگاه دو مکتب مستطیل $م$ و $م$ در یک بعد مشارک باشند نسبتشان
 مثل سطح دو بعد یکسان باشند و عبارات اخروی دو مکتب مستطیل که
 ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است
 برهان - سه بعد مکتب مستطیل $م$ را $د و د$ فرض میکنیم و سه بعد $م$ را $د و د$
 و مکتب مستطیل ثالثی $م$ توهم میکنیم با بعد $د و د$

پس دو مکتب مستطیل $م$ و $م$ چون مشترکند در دو بعد $د و د$ نسبتشان مثل
 دو ارتفاع است باینصورت $م : م = د : د$

و بهمان دلیل $م : م = د : د$

این دو تناسب را در هم ضرب میکنیم و در جمله اولش را بر $م$ قسمت میکنیم چنین میشود

$$م : م = د : د \times م : د \times د : د \quad (۱)$$

و سابق گرفته که دو قاعده $د و د$ از دو مکتب مستطیل بر نسبت دو سطح $د$

$$د و د \times د : د = م : م = د : د \quad (۲)$$

قضیه دوازدهم

دو مکتب مستطیل بر نسبت دو حاصل ضرب قاعده خود باشند در دو ارتفاع
 و عبارات اخروی بر نسبت دو حاصل ضرب سه بعد خود باشند

برها - فرض میکنیم ϵ ارتفاع مکعب متطیل m باشد و ω و δ دو بعد قاعده
و نیز ϵ ارتفاع مکعب متطیل m باشد و ω و δ دو بعد قاعده اش که ω و δ مکعبی
سیتم باشد با ارتفاع ϵ و بقاعده δ

پس دو مکعب m و m چون بر ارتفاع واحد باشند بنا بر قضیه سابقه

$$m : m = \omega : \delta$$

و دو مکعب m و m چون بر قاعده واحد اند و

$$m : m = \epsilon : \epsilon$$

حال این دو تناسب در هم یک ضرب میکنیم و در جمیع نسبت اول را m قسمت میکنیم چنین میشود

$$m : m = \omega \times \epsilon : \delta \times \epsilon \quad (1)$$

و از خارج میزنیم که دو قاعده ω و δ بر نسبت دو سطح $\omega \times \epsilon$ و $\delta \times \epsilon$ باشد پس

$$\omega \times \epsilon : \delta \times \epsilon = \omega \times \epsilon : \delta \times \epsilon$$

$$\text{و نظر بر نسبت مشترک } m : m = \omega \times \epsilon : \delta \times \epsilon \quad (2)$$

در مساحت مکعب متطیل

تقدیر و مست بر مکعب متطیلی مثل m عبارت از یافتن نسبت مکعب متطیل m که چه
فرض شده باشد

و از روی شایب (۲) چنین معلوم میشود که برای یافتن این نسبت باید ابعاد ω و δ

و ω و δ را با واحد طول اندازه گرفت و حاصل ضرب سه عدد اول را قسمت نمید

بر حاصل ضرب سه عدد ثانی

و این حساب خیلی آسان شود هرگاه واحد حجم m را بقوی اختیار کنیم که ضلعش واحد طول باشد

چونکه آنوقت اعداد نظایر ω و δ هر کدام واحدی شوند و شایب (۳) چنین میشود

مقاله ششم

۱۹۲

$$۲ : ۴ = ۶ \times ۶ \times ۱۰$$

و بنا بر این مساحت مکعب مستطیل مساویست با حاصل ضرب سه بعدش در هم دیگر و باید یافت شد که حاصل ضرب $۶ \times ۶ \times ۱۰$ عدد مرآتیی است که در قاعده و مکعب مستطیل و یکجمله مربع واحد طول

پس مساحت مکعب مستطیل نیز مساوی شود با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع (فاصله) بر آنکه واحد سطح مربعی باشد از واحد طول و واحد حجم مکعبی باشد در مرسوم بر همان واحد طول

$$\text{مثال اولاً } ۶ = ۱۲, ۵۱ = ۶ \text{ و } ۲۵ = ۳, ۲۵ = ۶ \text{ و } ۴۵ = ۳$$

و مساحت مکعب مستطیل این میشود $۲۵ \times ۳ \times ۲۵ = ۱۹۹۱۵۸۷۵$ و حجم مکعب مستطیل در این باشد ۱۹ متر مکعب ۹۱۵۸۷۵ هزار هزار متر مکعب را یا ۱۹ متر مکعب ۹۱۵ و دهم مکعب ۱۷۵ یا شصت مکعب را زیرا که در حساب ذکر نمودیم که دهم مکعب هزار متر مکعب است و شصت مکعب هزار متر مکعب و دهم مکعب ثانیاً $۵۱ = ۵$ و $۲۵ = ۶$ و مساحت مکعب مستطیل این باشد $۵۱ \times ۲۵ \times ۱۷۵ = ۲۱۸۱۷۵$ پس حجمش این باشد ۳۱۸۱۷۵ متر مکعب

قضیه ششم

حجم هر متوازی السطوح و بطور کلی از هر منشور مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاعش

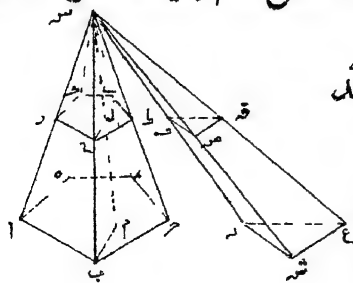
ملاحظه - اولاً چون هر متوازی السطوح معادلت مکعب مستطیلی که بر ارتفاع آن باشد و قاعده معادلان قاعده اش و مساحت ثانی مساویست با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع پس مساحت حجم اول نیز مساوی باشد با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع ثانیاً هر منشور مثلث القاعده چون نصف متوازی السطوحی است که همان ارتفاع باشد

و بر قاعده مضاعف و مساحت حجم ثانی مساویت با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع
پس مساحت حجم منشور مثلث القاعده مساوی باشد با حاصل ضرب قاعده اش در نصف قاعده و ارتفاع
السطوح است در ارتفاع خود

مثلاً - هر منشور غیر مثلث القاعده را چون میتوان تقصیل نمود با بقدر منشورات مثلث القاعده
کثیر الاضلاع قاعده اش مثلثات قسمت شود و مساحت هر کدام از این منشورات مثلث القاعده
مساویت با حاصل ضرب قاعده خود در ارتفاع و ارتفاع در همه یک است پس مجموع مساحتها
منشورات غیره مساوی باشد با مجموع مثلثات پس قاعده ضرب در ارتفاع مشترک پس
مساحت هر منشور مطلقاً مساویت با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع آن
نتیجه چون دو منشور یک ارتفاع اختیار کنیم نسبت دو حاصل ضرب هر قاعده در ارتفاع
خود در نسبت دو قاعده باشد پس دو منشور یک یک بر یک ارتفاع باشند نسبتاً
مثل دو قاعده است و همین دلیل دو منشور یک یک بر یک قاعده باشند نسبتاً
مثل دو ارتفاع است

قضیه چهارم

هرگاه هر یک مثل سه اوجه را قطع نماییم موازات قاعده اش بر سطح و ط کوئیم
اولاً اضلاع سه اوجه و سه وجه و غیره و ارتفاع سه اوجه بر یک نسبت قطع شوند بر نقطه



و ثانیاً مقطع سطح ط که کثیر الاضلاع باشد
مشابه قاعده اب دعه
برهان - اولاً چون دو سطح اب دعه و ط
متوازی باشند و فصل مشترک اب دعه

مقاله ششم

۱۹۴

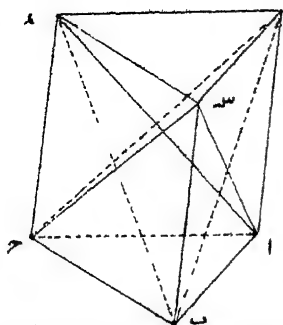
باین آنها و سطح ثالث سدا ب متوازی شوند پس دو مثلث سدا ب و سده ب متساوی شوند
و این تناسب حاصل شود سده ا : سده و = سده ب : سده و همچنین سده ب : سده و = سده
: سده و بکذا سایر اضلاع پس جمیع اضلاع سدا و سده ب و سده و غیره بر یک نسبت
قطع شده اند بر نقاط ر و و و ط و غیره و ارتفاع سده و نیز بهمان نسبت بر نقطه ل قطع
زیرا که ب م و ل متوازی هستند و بنا بر این سده م : سده ل = سده ب : سده و
ثانی چون و ب موازیست با اب و ط با ب ح و ط با د و غیره پس
زاویه و ب ط = ا ب د و و ط = ب د و بکذا و علاوه بر این نظریه باشد و دو مثلث
اب و سده و این تناسب حاصل شود اب : و ب = سده ب : سده و و نظریه باشد و دو
سده ب د و سده و ط این تناسب سده ب : سده و = ب د : و ب ط پس اب : و ب = ب د
: و ب ط و بکذا ب ح : و ب ط = د ح : ط و بکذا سایر اضلاع پس و کو نیز این اضلاع اب ح د ه
و و ب ط ل ه زوایای نظیر نظیر متاوی باشند و اضلاعشان متناسب پس متساوی باشند
پس فرض میکنیم سده اب ح د ه و سده و ب د و هر دو یک ارتفاع و دو قاعده
در یک سطح باشند پس اگر اند و را بسطی موازی قاعده قطع کنیم و مقطع حاصل شود و ب ط
ل و ف صدقه و کو نیز این دو بر نسبت دو قاعده اب ح د ه و و ب د و ب باشند
چون آنها دو قاعده اب ح د ه و و ب ط ل چون متساوی هستند نسبتشان مثل مربع
دو ضلع متقابل اب و ب است ولی اب : و ب = سده ا : سده و پس اب ح د ه : و ب ط
ل = سده ا : سده و و بنا بر این و ب د : ف صدقه = سده و : سده ا و چون و ب ط
ل : و ب ط = و ب د : ف صدقه : ف صدقه یعنی که دو مقطع بر نسبت دو قاعده هر چه شد پس
اگر اند و قاعده متعادل باشند دو مقطع که یک ارتفاع حاصل شوند متعادل گردند

منشورات داخله طرح میکنیم خط الرأس را از جای خط الرأس منتهی باشند نظایر آنرا
مذکوره و ارتفاع واحد جمیع این منشورات هه است
در هر م سواب ه مجموع منشورات خارجیه اعظم است از این هر م و در هر م سواب ه
بر خلاف مجموع منشورات داخلیه اصغر است از آن هر م و باین دو سبب تفاضل بین
دو مجموع منشورات اعظم میشود از تفاضل مابین دو هر م

و ابتدا دو قاعده اب ه و اب ه منشور خارجی دویم مده به معادلت با
منشور داخل اول مده را چونکه دو قاعده آنها مده و مده و متعادلند و هر دو با
ه و بهمین دلیل منشور خارجی سیم با ط س ه معادلت با منشور داخل دویم با ط س ه و
منشور خارجی چهارم با منشور داخل سیم و پنجمین آن هر م منشور آنها پس با ر ه جمیع منشورات خارجیه
هر م سواب ه غیر از منشور اول اب ه منشورات داخلیه معادله موجود است در هر م
منه اب ه پس منشور اب ه ه تفاضل باشد مابین مجموع منشورات خارجیه هر م سواب ه
و مجموع منشورات داخلیه هر م سواب ه و سابق برین شده که تفاضل مابین این دو مجموع اعظم
از تفاضل مابین دو هر م پس لازم شد که منشور اب ه ه اعظم باشد از منشور اب ه ه و حال
آنکه اصغر است زیرا که هر دو بر قاعده واحده اب ه طرح شده اند و ارتفاع منشور اول ه
اقصر است از ارتفاع منشور دویم ا ه پس معلوم شد که فرض مبدأ صحیح نیست و بنا بر این هر م
سواب ه و سواب ه که بر دو قاعده متعادلند و بر دو ارتفاع مساوی متعادل باشند

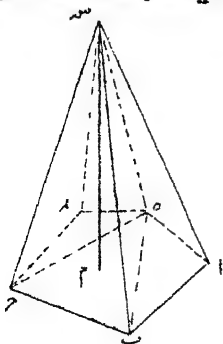
قضیه شانزدهم

جسم هر مثلث القاعده ثلث منشور مثلث القاعده است که ارتفاع آن ارتفاع ثلث
فرض میکنیم سواب ه هر م مثلث القاعده باشد و اب ه م منشور مثلث القاعده بر قاعده
و ارتفاع آن و میگوئیم آن هر م ثلث منشور است



برها - وضع کنید از مشور برهم سه ا ب د را
تا باقی ماند جسم سه ا ح د و آنرا میتوان برهم مرتج
القاعده دلت بر راس سه و بر قاعده متوازی
الاضلاع ا ح د و قطر ح د را وصل کنید و سطح
س د ح را م و ر و بی ه تا از اید و برهم مثلث
القاعده سه ا ح د و سه د ح و قمت کین

و ارتفاع مشترک این دو برهم عمودیت دارد از راس سه بر سطح ا ح د و دو قاعده آنها
متساوی باشند چونکه د مثلث ا ح د و د ح د هر کدام نصف متوازی الاضلاع است پس
دو برهم متعادل باشند و اما دو برهم سه د ح و سه ا ب د دو قاعده س ا ب د و د ح د
متساوی باشند و بر یک ارتفاعند چونکه این ارتفاع عبارت است از فاصله باین دو سطح متوازی
ا ب د و د ح د پس این دو برهم سه ا ب د و سه د ح متعادل باشند و ثابت نموده ایم که برهم
سه د ح معادلست با سه ا ح د پس سه برهم سه ا ب د و سه د ح و سه ا ح د که از هم می شود
ا ب د میشوند متعادل شد و بنا بر این برهم سه ا ب د مثلث مشور ا ب د است که قاعده ارتفاع
نیکجه - مساحت جسم هر برهم مثلث القاعده مساویت با ثلث حاصل از
قاعده اش در ارتفاع



قضیه پنجم

مساحت جسم هر برهم بطور مطلق مثل سه ا ب د
مساویت با ثلث حاصل ضرب قاعده اش ا ب د
در ارتفاعش سه
برها - چون دو سطح سه د ح و سه د ر ا م و ریم

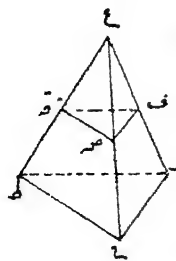
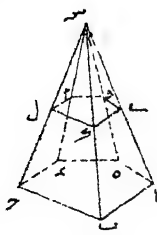
بر دو قطر ه و ه هر هم مفروض که قاعده اش کثیر الاضلاع بود قسمت می شود بر چند برابر مثلث القاعده که جمیعاً با ارتفاع مشترک م د م باشند و بنا بر قضیه سابقه مساحت هر یک از این اهرام مساویست با حاصل ضرب یکی از قواعد اب ه و ب ح و ج د ه در ثلث ارتفاع مشترک م د م پس مساحت مجموع این اهرام مثلث القواعد یعنی مساحت هر هم مفروض متساویست با مجموع مثلثات اب ه و ب ح و ج د ه یعنی کثیر الاضلاع قاعده اب ح د ه ضرب در $\frac{1}{3}$ م د م پس مساحت هر هم مساویست با ثلث حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع و ارتفاع فیکجا - حجم هر هم ثلث منشور است که بر قاعده و ارتفاع آن باشد
نقد ۲- نسبت دو هر هم که بر ارتفاع واحد باشند مثل دو قاعده آنها است و هرگاه بر یک قاعده باشند مثل دو ارتفاع آنها است

شریح - بر جسم کثیر السطوح هرستون مساحت کرد بانیکه تقسیم نماید بر چند میرم و بطریق تقسیم
بر چند وجاست یک شرا نیکه کسطوح تقسیم را هر روزیم بر برش یکی از زوایای مجانبه و درصورت
عدد ابرام جبرئیه برابر است با عدد سطوحیکه جسم منقوش دارد غیر از آن چند سطحیکه محیط اند بر آن زاویه مجانبه
و بر کدام از این مرام را بعنوان تقسیم نمود بر چند چهارسطحی بانیکه قاعده اش را قسمت کنیم بمثلثات

قصہ محمدی

هرگاه هر میوه و از قاعده اش قطع کنیم مساحت حجم هر میوه ناقصی که بعد از
هر کوچیک باقی میماند مساویست با مجموع سه هر میوه که ارتفاع مشکی
همان ارتفاع هر ناقص باشد و سه قاعده آنها یکی قاعده سفلی هر ناقص
باشد و دیگر قاعده علیایش و دیگر قاعده که واسطه در نسبت باشد و این
اند و قاعده

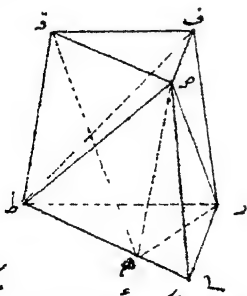
نیزها فرض میکنیم سوابد هر می باشد مقطوع بسطح - م بموازات قاعده اش و



هرمی باشد مثلث القاعده که قاعدو ارتفاعش
معاول و مساوی باشد با قاعده و ارتفاع
هرم مفروض و نیز فرض میکنیم که دو قاعده
در یک سطح باشند و آنوقت سطح $ل م$ را
استادیم پسیم تا هرم مثلث القاعده را

قطع کند بمقطع $ف$ و حده و اینمقطع با ارتفاع هرم ناقص است و بنا بر این نسبت بمقطع $ف$ حده
بمقطع $ل م$ مثل قاعده $ل م ط$ است بقاعده $ا ب د و$ و چون قاعده $ف$ فرض
متعاول باشد اند و مقطع نیز متعاولند پس دو هرم $ل م د$ و $ع$ $ف$ حده چو
بر ارتفاع واحد و قاعده متعاوله اند متعاول باشند و دو هرم تمام $س ا ب د و$
و $ع$ $ل م ط$ بهائیل متعاولند پس بعد از وضع دو تایی اول از دو تایی ثانی دو هرم ناقص
باقی $ا ب د م$ $ل م د$ و $ل م ط$ $ف$ حده متعاول شوند و بنا بر این کافیست که حکم مذکور را
بر هر دو نیم در هرم ناقص مثلث القاعده

پس فرض کنیم $ل م ط$ $ف$ حده هرم ناقص مثلث القاعده باشد بر دو قاعده متوازی و یک



سه نقطه و دو حده و سطحی موربیم به تمام جدا
کنند از هرم ناقص هر مثلث القاعده حده $ل م ط$ را
قاعده این هرم همان قاعده سفلی $ل م ط$ هرم
ناقص است و ارتفاعش همان ارتفاع چونکه رأس
حده بر سطح قاعده علیای $ف$ حده واقع است

بعد از وضع این هرم باقی میماند هرم مربع القاعده حده $ف$ که رأسش حده است و قاعده
 $ف$ $د$ $ط$ حال بر سه نقطه $ف$ و حده و سطحی موربیم به تمام مربع القاعده را قسمت کند بر

مقاله ششم

۲۰۰

هر مثلث القاعده ص د ف ط و ص د ف ط و قاعده هر م ثانی همان قاعده علیای
ص د ف ط هر م ناقص است و ارتفاعش همان ارتفاع چونکه رأسش نقطه ط و ارتفاعه
است پس انجمله سه هر م که میباشد هر م ناقص را نیز یکبندند و مابینش است

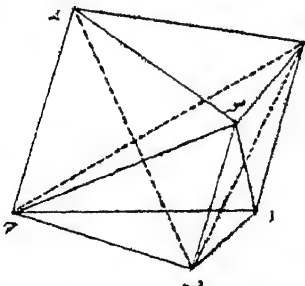
باقی ماند ملاحظه هر م سیم ص د ف ط پس ص د هر م و ارات ق د ر سیم میکنیم و هر م جدید
تو هم میکنیم که رأسش بر ه باشد و قاعده اش د ف ط حال این دو هر م مشارکند
در قاعده د ف ط و ارتفاعشان نیز یکی است چونکه دورشان ص د و هر م اول
میشد بر خط ص د که موازیست با ط ق و بنابراین با سطح قاعده پس این دو هر م متساوی
باشند ولی هر م ف د ه ط را میتوان چنان تصور کرد که رأسش بر ف باشد
و بنابراین ارتفاع هر م ناقص است و اما قاعده اش د ه ط واسطه در نسبت
باین دو قاعده د ف ط و ص د ق بر آن در دو مثلث د ط ه و ف ص د ق زاویه
ط = ق و ضلع ط ه = ق ه پس د ط ه : ف ص د ق = د ف ط : ف ق و نیز د
ط ه : د ف ط = ط ه : ق ه یا ق ه ص د ولی نظر بشاید دو مثلث د ف ط و ف ص د ق این نسبت
حاصل شود د ف ط : ق ه = ص د : ف ق پس د ف ط : د ط ه = ف ص د : ف ق و
پس قاعده د ط ه واسطه هندی شد باین دو قاعده د ف ط و ف ص د پس هر م
ناقص مثلث القاعده که دو قاعده اش متوازی باشند معاد است با سه هر م که رأسش
باشند در ارتفاع همان هر م و قواعدشان یکی قاعده سفلی هر م ناقص باشد و دیگر
قاعده علیایش و دیگر واسطه نسبت باین همان دو قاعده

قضیه نهم

چون منشور و مثلث القاعده را که بر قاعده اب باشد قطع کنیم
به سه مانع نسبت باین قاعده پس هر م اب ه د که در تحت سطح قاعده

باقی میاند مساوی باشد با مجموع سه مرکز رؤسایان بر نقاط و و و
باشد و قاعده مشترک اینها برابر است

بر همان بر سه نقطه سه و ا و ح سطحی و در سبب تا بعد کند از خور ناقص اب حد سه
به هم مثلث القاعده سو اب د را که قاعده اش اب د است و رانش سه بعد از
وضع انهم باقی ماند به هم مربع القاعده سه ا ح ه که رانش نقطه سه است و
قاعده اش ا ح ه بن سه نقطه سه و ه و د نیز می رود و سوم تا هر مربع ا
را قسمت کند بدو هم مثلث القاعده سه ا ح ه و سه ح د

[illegible]

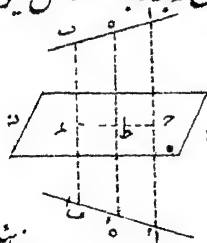
وہرم سیم سید ۷۵۰ را اول بدکنم بم

اسم α زیرا که این دو بر قاعده واحد α باشد و بر ارتفاع واحد چونکه α موازیت با سطح α پس این دو هر متعادل کشند و هر ثانی α اسم β را متعادل
مبتدل نمود و هر α β زیرا که هر دو بر قاعده واحد α باشند و نیز بر ارتفاع
واحد چونکه دور ایشان α و β واقع باشند بر خطی موازی با سطح قاعده α پس
سم α معادل شد با هر α و این α با β و هر α نیز را متعادل بر قاعده

اب فرض نمود و بر آن سه پهن یا کج نمود و ناقص اب ده سه مساویت
با مجموع سه هر که بر قاعده واحد اب باشد و روشن بقاطعه و سه
نتیجه هرگاه خط الراس ای ه و ب سه و ده عمود باشد بر قاعده خود ارتفاع
شوند در سه هر که جزه ناقص و آنوقت مساحت منشور چنین میشود
 $\frac{1}{3} \times \text{اب} \times \text{اه} + \frac{1}{3} \times \text{اب} \times \text{ب سه} + \frac{1}{3} \times \text{اب} \times \text{ده}$ و این صورت
تجول میشود $\frac{1}{3} \times \text{اب} \times (\text{اه} + \text{ب سه} + \text{ده})$

در تقایین اشکال

دو نقطه را نسبت به خطی مقدار قرینه کوئیم هرگاه این خط عمود باشد بر وسط خط واصل بین
آن دو نقطه و آنرا سطح تقارن کوئیم
و دو شکل را نسبت به خطی قرینه کوئیم هرگاه قرینه هر نقطه از یکشان موجود باشد در شکل دیگر
قضیه نسبتی



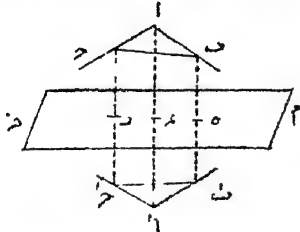
هر خط مستقیم مثل اب را قرینه خطی است میقیم
بر خطا - بر خط مفروض دو نقطه ا و ب فرض کنید و قرینه
آنها ا' و ب' را با این وجه بدست آورید که ما را از دو نقطه عمود

بر سطح م فرود آورید و هر کدام را با اندازه خود امتداد دهید و دو خط اب و ا' ب' را وصل
حالا ثابت کنیم که قرینه هر نقطه از اب مثلا ه واقع شود بر خط ا' ب' پس عمود
ه را بر سطح م فرود آوریم و امتدادش هستیم تا تلاقی کند اب را
و چون دو ابراج اضلاع ا ب ه و ا' ب' ه را حول ه دوران دهیم تا واقع شود بر سطح
ا' ب' نظر بدو زاویه قائمه ا ب ه و ا' ب' ه خط ه واقع شود بر ا' و چون
= ه نقطه واقع شود بر ا' و بهمین دلیل ب' بر خط ا' و آنوقت اب تطبیق

شود بر AB و علاوه بر آن چون دوزاویه EDC و EDF قائمه اند طه واقع شود بر
استقامت طه پس چون نقطه E مناسبت یکمرتبه واقع شود بر دوخط AB و طه واقع
خواهد شد بر E و بنا بر این $EDC = EDF$ و E قرینه نقطه E باشد
بنیجه - ضمناً ثابت شد که خط AB و حاصل مابین دو نقطه A و B مساویت با AB
واصل مابین وقرینشان

قضیه بیست و یکم

زاویه حادثه مابین دوخط AB و AD مساویت با زاویه حادثه مابین
دوقرینشان AB' و AD'



برهان - اول باید دانست که قرینه نقطه A
فصل مشترک مابین دوخط AB و AD نقطه A
باشد چونکه قرینه باید یکمرتبه واقع شود بر
دوخط AB و AD

حال بر AB و AD دو نقطه B و C فرض میکنیم و قرینه آنها را مشخص میکنیم
است و D' و دوخط $B'D'$ و $C'D'$ را وصل میکنیم
پس و مثلث ABC و $A'B'C'$ مساوی باشند و زاویه $B = B'$ و $C = C'$

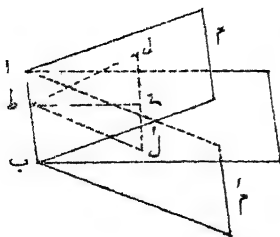
قضیه بیست و دوم

قرینه هر سطح مستوی سطحی است مستوی و دوزاویه حادثه مابین
این دو سطح و سطح تقارن متساوی باشند
برهان - خط AB فصل مشترک است مابین سطح M و سطح تقارن AB' و خط
سطح AB' را چنان میگردانیم که زاویه حادثه مابین آن و سطح تقارن برابر باشد

مقاله ششم

۲۰۴

بازاویه که از سطح مفروض حادث شده



و حال با این ثابت کنیم که قرینه هر نقطه از سطح

ابم مثل نقطه ل واقع میشود بر سطح ابم

سعدول ۱ را بر ابم فرو آوریم و امتداد

ویم تا قطع کند سطح ابم را بر نقطه ل و بعد

خط را عمود کنیم بر اب و دو خط ل ط و ل ط واصل کنیم

این دو خط عمود باشند بر اب و در زاویه ل ط ح و ل ط ح متساوی شوند چنانچه

مقیاسند و در زاویه وسطی متساوی م اب د و م اب د را پس دو مثلث قائم الزاویه ل ط د

و ل ط ح چون مشار کنند در ضلع ط ح و یک زاویه حاده شان متساویت متساوی شوند و آنوقت

ل د = ل ح پس ل قرینه نقطه ح باشد و این حکم کلی است در سایر نقاط

بقیة - هرگاه سطح مفروض موازی باشد سطح تقارن اب د و بهمان فاصله واقع است

قرینه اش سطح و یک راست موازی با اب د و بهمان فاصله واقع است

قضیه بیست و ششم

زاویه دو سطحی حادثه ما بین دو سطح اب د و اب د مساویت با

زاویه حادثه ما بین دو قرینشان اب د و اب د

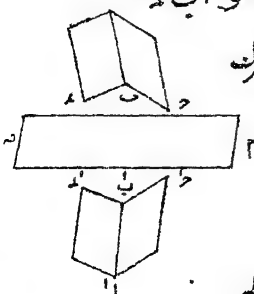
برهنا اول باید دانست که قرینه خط اب فصل مشترک

ما بین دو سطح اب د و اب د خط اب است

فصل مشترک ما بین دو سطح اب د و اب د

مین نقطه ب مقیاس زاویه وسطی اب

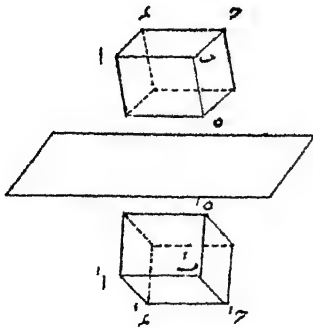
را رسم میکنیم و آن زاویه د ب د است و همچنین بر نقطه



ب قرینہ ب مقياس ناويد و سطحی اب رارسم ميکنيم و از زاويه سطحه د ب ب است
 حال قرينه خط ب ب واقع در سطح اب خطی باشد و مرکز کنند بر نقطه ب و واقع در
 علاوه بر آن چون ب ب عمود است بر اب قرينه اس عمود باشد بر اب و ۲۱ چنین
 خط ب ب میشود و بهمين دليل ثابت ميکنيم که ب ب قرينه ب ب است پس زاويه د ب ب
 = د ب ب و ۲۱

قصهٔ بيت و چهارم

هرگاه دو کثیر السطوح نسبت بسطحی قرينه باشند کوئیم که اسطوح اطراف
 نظير نظيره متساوی ميباشند ثانياً زواياي مجتمعه متناظره آنها قرينه ميشند
 (مقالهٔ پنجم)



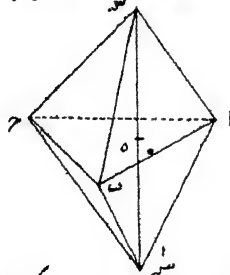
برهان - اولاً اشاطا و ب و ج و د روش کی
 از سطوح اطراف یکی از دو کثیر السطوح باشد و ۲۲
 آنها ا و ب و ج و د نیز در سطح واقع شوند
 و علاوه بر آن این دو کثیر السطوح اب ج د و ا ب
 متساوی باشند چونکه زواياشان متساوی باشند
 و اضلاعشان نیز نظير نظيره متساوی و ۲۱ و ۲۰

ثانياً - دو زاويه مجتمعه متناظره ب و ب سطوحشان متساوی باشند و ۲۱ و زوايا
 دو سطحشان نیز متساوی و لی سطح اب ه ز بر متساوی خود اب ه نقل کنیم و چونکه سطح
 الی ههای دو زاويه مجتمعه بر یک سطح مشترک واقع شوند ظاهر است که سایر زواياي متناظره آنها نیز
 یکسان واقع میشوند پس زاويه مجتمعه ب قرينه زاويه ب است
 نتیجتاً - از این حکم چنین معلوم میشود که هر کثیر السطوحی مثل ک را یک قرينه پسر نباشد زیرا که

چون که وک را وقرینه که فرض کنیم بدو سطح مختلف افوق سطوح شایع
 مساوی باشند با سطوح که مساوی می شوند و زوایای مجتبه شایع بین این دو اما
 مجتبه که هستند مساوی می شوند پس دو کثیر السطوح که وک قابل الطباق باشند بر یکدیگر
 منتجه ۲- چون کثیر السطوح که را مجتبه نامیم با هم مثلث القواعد که در کثیر السطوح شایع
 یکی از رؤس کثیر السطوح باشد هر کدام از این چهار امر هر می قرینه باشد در کثیر السطوح که
 پس هر دو کثیر السطوح قرینه را میتوان تقصیل نمود بچندین چهار سطحی که نظیر نظیر قرینه یکدیگر باشند
 شرح- دو کثیر السطوح که سطوحشان نظیر نظیر مساوی باشند و زوایای مجتبه شان قرینه یکدیگر
 آنها را همواره قرینه گوئیم هر وضع باشند نسبت به یکدیگر ولیکن در این صورت تقارن بهمین
 در شکل آنها است نه در وضعشان

بقیه- در آنچه ذکر شد مقصود ما از دو زوایای مجتبه خطاطه آنها اسکے دورشان قرینه یکدیگر باشند

قضیه بیست و پنجم



دو کثیر السطوح قرینه متعادل باشند
 برهان- چون مذکور شد که دو کثیر السطوح قرینه را
 میتوان تجزیه نمود بچندین چهار سطحی قرینه بر اثبات حکم
 مذکور و در دو چهار سطحی قرینه کفایت میکند

شکل سواد جسمی است چهار سطحی و قرینه اش را طرح میکنیم بنا بر آنکه سطح تقارن یکی از
 سطوح آن باشد مثل ا ب د و منتجه ۲ و این دو جسم متعادل باشند چونکه قاعده و
 ا ب د هم شد و بر دو ارتفاع مساوی سوه و سوه
 یکدیگر و نقطه او ا را قرینه گوئیم نسبت به نقطه ثاله ه هرگاه خط وصل باین اند و نقطه
 شده باشد بر نقطه ه که مرکز تقارن است

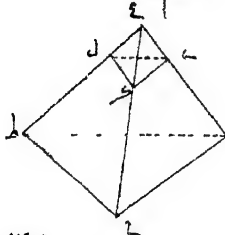
و دو شکل را نسبت به نقطه قریه کوئیم هرگاه قریه هر نقطه از یکی از ابعاد و در شکل دیگر باشد
در تقارن نسبت به نقطه احکام چند است مانند آنچه سابق ذکر کرده و هرگاه شخصی آن احکام را
خوب بخواند و بداند این احکام را با سانی برین از پس از ذکر اینها مستقیماً بشیم و در عین متعین کنانیم

در تشابه اجسام

و و کثیر السطوح را متشابه گوئیم هرگاه سطوح اطرافشان متشابه باشند نظیر نظیر و زوایای
مشابه شان متساوی باشند و مقصود از زوایای مشابه آنها باشد که سطوح اطرافشان متشابه
و در و کثیر السطوح متشابه هر دو خط واصل بین برشش مشابه را متناظر گوئیم

قضیه نخست و ششم

در چهار بسطی $ا ب ج د$ چون خط الزامهای $ا ب و ج د$ و $ب ج و د ا$ و $ج د و ا ب$ و $د ا و ب ج$ قسماً
کیم بر نقاط $ا$ و $ب$ و $ج$ و $د$ و خطوط $ا ب$ و $ب ج$ و $ج د$ و $د ا$ واصل کنیم
جسم چهار بسطی جدید $ا ب ج د$ ل شبیه باشد بجسم اول



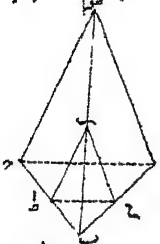
برهان - دو مثلث $ا ب ج$ و $ا ب د$ چون در یک
زاویه قرار دارند و ضلع $ا ب$ مشترک است متشابه باشند
و همچنین دو مثلث $ا ب ج$ و $ا ب د$ و دو مثلث $ا ب ج$ و $ا ب د$
و $ا ب ج$ و $ا ب د$ و $ا ب ج$ و $ا ب د$ واصل موازی میباشند

با $ا ب ج$ و $ا ب د$ سطح $ا ب ج$ و $ا ب د$ موازیت با $ا ب ج$ و $ا ب د$ متشابه باشد
و با $ا ب ج$ و $ا ب د$ و زاویه مجتبه مشابه مثل $ا ب ج$ و $ا ب د$ متساوی باشند چنانکه نظیر متشابه سطوح
هر دو زاویه سطح متشابه متساوی باشند و این سطوح هم متشابه به الی و وضع اند پس و حجم
سطوحشان متشابه و زوایای مجتبه اطرافشان متساوی و بنا بر این متشابه باشند
مشترک - باید این نکته را عطف بود که در دو جسم چهار بسطی متشابه خط الزامها متناظرشان

و بالعکس اگر دو جسم چهار سطحی خط الرأسها متساو باشند و متساوی به وضع شوند
جسم متساوی باشند زیرا که از تناسب سطح متساوی به وضع لازم آید چون سطوح متساوی و متساوی
الوضع شدند زوایای مجامع متساوی شوند چون وایای سطحشان نظیر نظیر متساوی باشند

قضیه بیست و هفتم

در دو چهار سطحی سه ا ب د و ع ه د هرگاه یک زاویه دو سطحی مساوی
باشد سطوح طرفیشان متساوی و متساوی به وضع اند و جسم متساوی باشند



برهان - فرض کنیم زاویه دو سطحی سوب ع ه د

و مثلث سه ا ب متساوی با ع ه د و مثلث سه ج

متساوی با ع ه د

سطوحشان
و در زاویه مجامع مساوی چون یک زاویه دو

متساویست و دو سطح طرفیشان متساویست و متساوی به وضع پس متساوی باشند و زاویه

مساوی شود با زاویه ع ه د و نظیر متساوی دو مثلث سوب و ع ه د نیز دو مثلث سوب ج

و ع ه د این دو متساوی باشد پس

$$\text{سوب : ع ه د} = \text{سه ا : ع ه د}$$

$$\text{سوب : ع ه د} = \text{سوب ج : ع ه د}$$

$$\text{سه ا : ع ه د} = \text{سوب ج : ع ه د}$$

پس

پس دو مثلث سوب و ع ه د متساوی باشند چون یک زاویه در آنها مساوی باشد و ضلعان طرفین

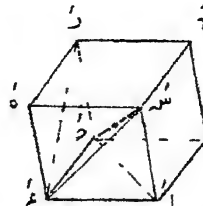
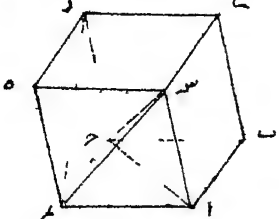
و بهمین دلیل ثابت کنیم که دو زاویه مجامع و متساوی باشند و بعد از آن متساوی

ه و و باجمد دو زاویه مجامع ا و ع متساوی باشند با دو زاویه مجامع د و ج و چون که زوایای

سطحیشان نظیر نظیر متساوی باشند پس دو جسم چهار سطحی متساوی باشند

قضیه بیست و ششم

دو کثیر السطح متشابه را میتوان تجزیه کرد بیل عدل از اجسام چهار سطحی متشابه



و متشابه الوضع
برها - و کثیر السطح

سده در عدا ح
جمع سطوح را بمثلثات

قسمت میکنیم غیر از آنکه اطراف رأس سده باشند بمثلثات قواعد چهار سطحی
باشد که رأس مشترک آن نقطه سده فرض شده و مجموع آنها جسم اول ترکیب میشود
و همچنین در کثیر السطح سده نیز عدا اب ح سطوح غیر مجاور بر رأس سده را قسمت میکنیم
و این نقطه نظیر است بر رأس سده و نقطه سده را وصل میکنیم بر رأس بمثلثات کثیر
السطوح ثانی قسمت شود بچهار سطحی حال باید ثابت نمود که این چهار سطح مشابه چهار سطح کثیر السطح اول نظیر
متساو و در چهار سطحی سده ح ا و سده خ ا د و مثلث سده ا و ح اما مشابهند بابت
سده ا و خ ا د چونکه دو سطح سده ا و ح و سده ا و خ از هر دو متشابهند و دو سطح ح ا د و خ ا د
از طرف دیگر و نظیر است و میسبیل سطوح دو جسم مفروض زاویه وسطی اما مساویت با عدا پس
آن دو چهار سطحی متشابه باشند

حال در دو چهار سطحی سده ح د و سده خ د و مثلث سده ح د و سده خ د چون
سطح قنار انداز دو چهار سطحی متشابه باشند و نظیر متشابه و کثیر الاضلاع ده ح د و
ده خ د مثلث ح د و متشابه است با خ د و دو زاویه وسطی ح د ح و خ د خ
بفرض مثلث متساوی باشند و دو زاویه وسطی سده ح ا و سده خ ا متشابه دو چهار سطحی
سده ح ا و سده خ ا متساوی باشند پس دو زاویه وسطی ح د ح و خ د خ متساوی

آن چهار زاویه متساوی شوند پس دو چار سطحی سده و سده را متشابه باشند
و همچنین در سایر

تغییرات - دو کثیرالسطوح را با آن سر منتهی نمودیم و این تعریف را نیز در سر منتهیون شروع
بنیمایم - از قضیه مذکوره آن حکم نیز استنباط شود که در دو کثیرالسطوح متشابه هر دو خط متناظر
و اصل این روش متناظر متشابه باشند با هر دو خط از آن سر منتهی متناظر و با آن سر منتهی
نویسند - دو خط او و دو خط از آن سر منتهی متناظر شوند از دو چار سطحی متشابه اجزای دو
کثیرالسطوح و این دو چار سطحی البته متشابه باشند و دو خط از آن سر منتهی متناظر و دو خط از
کثیرالسطوح مفروض را $1 : 2 = 3 : 4$

و چون در دو کثیرالسطوح متشابه خط از آن سر منتهی متناظر نظر متشابه سطوح متشابه باشند

$$3 : 4 = 5 : 6 = 7 : 8$$

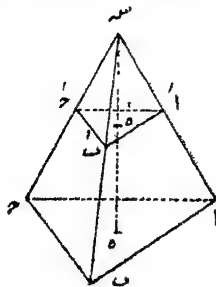
$$1 : 2 = 3 : 4 = 5 : 6 = 7 : 8$$

قضیه نهم

هر دو کثیرالسطوح که ترکیب شده باشند از یک عدد اجزاء همسان
متشابه و متشابه به الوضع سطوحی که از نظیر نظیر متشابه میشوند و
زاوای مجامع متناظرشان متساوی و بنا بر این اند و جسم مرکب متشابه باشند
بنها - در شکل سابق سواد و سواد و سواد و غیره اهرام اجزای کثیرالسطوح
اولند و سواد و سواد و سواد و سواد اهرام اجزای کثیرالسطوح دوم
اولا - نظیر متشابه چهار سطحی دو مثلث $1 : 2$ و $3 : 4$ که یک سطح کثیرالسطوح اول
ترکیب میکنند متشابه باشند و مثلث $1 : 2$ و $3 : 4$ از کثیرالسطوح دوم و چون
دو مثلث اول در یک سطح واقعند و دو مثلث دوم نیز همچو بنده

سود و سوادب و غیره ۲ و ۳ بر مجموع آنها کثیر الطوح دیگر ترکیب شود که بقیه
مشابه باشد با کثیر الطوح اول حال چون نسبت عتوان مکانش را بقیه داده در محل دیگر نشان نمود

قضیه سی ام



دو چهار سطحی متشابه بود نسبت دو مکعب هر دو
خط الرأس متناظره خود باشند

بزنها چون دو هرم متشابه فرض شده اند می توان گفت که هر دو
نقل نمود بر بزرگتر چنانچه زاویه مجسمه سه در هر دو مشترک باشد

و در این صورت دو قاعده ab و $a'b'$ متوازی شوند چونکه خط الرأسها سه و سه
و سه یک نسبت قسمت شده اند بر نقاط o و o'

حال خط سه را عمود می کنیم بر ab

و دو مثلث ab و $a'b'$ متشابه باشند و این تناسب حاصل شود

$$(1) \quad ab : a'b' = ab^2 : a'b'^2$$

$$\text{و نیز} \quad ab : a'b' = sda : sda'$$

$$\text{و} \quad سه : سه' = sda : sda'$$

و نظریه نسبت مشترک

$$(2) \quad سه : سه' = سه^2 : سه'^2 = ab : a'b'$$

و چون $ab \times سه^2$ مساحت جسم چهار سطحی سه ab است و $a'b' \times سه'^2$ مساحت

جسم چهار سطحی سه $a'b'$ پس حکم ثابت است

قضیه سی و یکم

دو کثیر السطح متشابه بود نسبت دو مکعب هر دو و خط الرأس متناظره است

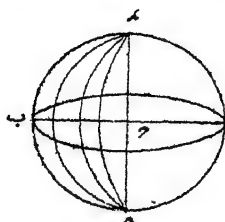
(مجموعه)

و چون و تناسب (۱) و (۲)
بترتیب در هم دیگر ضرب کنیم و دو
نسبت را در هم ضرب کنیم
چون شود $ab \times سه^2 \times سه' = a'b' \times سه'^2 \times سه$
بنا بر $سه' = سه$ پس
بنا بر $سه' = سه$ پس

مقاله هفتم در احوال کوه تعاریف

نکته

۱- کره جسمی است متحد و سطحی منحنی که جمیع نقاطش بیک بعد باشند از نقطه درونی



کره را میتوان توهم نمود بجزکت نصف دایره مداه

حول قطر مداه زیرا که سطحی که بجزکت این منحنی توهم شود جمیع

نقاطش یکفاصله واقع میشوند از مرکز

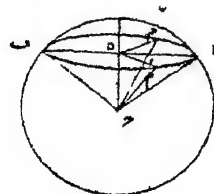
۲- شعاع کره خطی است وصل بین مرکز و نقطه

از سطح و قطری را محور خطی است که بر مرکز و مرکز و از طرفین منتهی شود سطح

جمیع اشعه کره بنا بر تعریف متساوی باشند و بکدام جمیع قطرها و باشند که در تمام

۳- سطح را بر کره تماس کوئیم هرگاه در یک نقطه مشارک باشند نه پیش

۴- دو کره را نسبت بهم تماس کوئیم هرگاه دو سطح آنها مشارک باشند در یک نقطه نه پیش



قضیه اول

فصل مشترک مابین کره و سطح متوحد دایره

برشها - خط ام ب مقطع سطحی است و کره در پس

از مرکز مداه را بر سطح ام ب فرو می آوریم

و خطوط دم و د م را وصل میکنیم بر نقاط مختلفه منحنی حد فصل مشترک

خطوط مائله دم و د م و د ب چون اشعه کره اند متساوی باشند پس متساوی

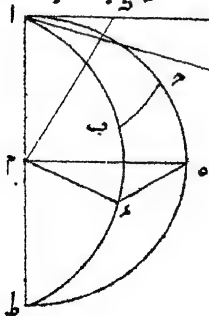
از موقع عمود ده یعنی خطوط هم و ه م و ه ب متساوی باشند پس فصل مشترک

ام ب دایره باشد مرکز ده

فصل ۱- هرگاه سطح قاطع بر مرکز کره گذرد شعاعی بصیغه شعاعی که است و بنا بر این جمیع دواثری که
بر مرکز کره مرور کنند مساوی باشند و آنها را دواثر عظام گوئیم
۲- دواثر دایره عظیمه هم دیگر را نصف کنند زیرا که فضل مشترکشان چنانچه مرکز یک دایره قطر کره است
۳- هر دایره عظیمه حجم و سطح کره را بر دو ضلع مساوی قسمت کند زیرا که بعد از جدا شدن دو نیم کره
هر دو دایره قاعده مشترک چنان قرار دهیم که حدیثشان یک سمت افتد و سطح آنها بر یکدیگر درست
منطبق شود و الا قاطعی در کره پیدا شود و مختلفه بعد از مرکز

۴- مرکز هر دایره صغیره و مرکز کره واقع باشند بر خطی عمود بر سطح دایره صغیره
۵- دواثر صغیره هر چند از مرکز کره ابعدا باشند از مرکز کره هر چند فاصله ده مشیه
باشد و تراب اقصی شود و آن قطر دایره صغیره است

۶- بر دو نقطه مفروضه بر صفحه کره همواره میتوان دایره عظیمه مرور داد زیرا که با دو نقطه مرکز
کره و وضع سطح قاطع درست معین میشود ولی اگر اندونقطه بر طرفین قطر واقع باشند نمیتوان
سه نقطه مذکوره بر یک استقامت واقع میشوند و عدد دواثر عظامیکه میتوان بر آنها مرور



دواثر غیر مستنایی است
۷- وضع دایره صغیره بر صفحه کره بر سه نقطه محیطش میشود

فصل دوم

سطح عمود بر طرف شعاعی تماس کره است

برها- فرض میکنیم سطح عمود بر طرف شعاع ۱

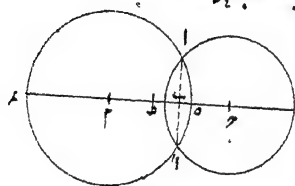
و نقطه د را بر این سطح فرض میکنیم و د را در اصل میکنیم

و زاویه ا د قائمه است پس فاصله م د ا طول باشد از ما و بنا بر این نقطه د در خارج
کره واقع شده است چنانکه می است در باب هر نقطه که بر سطح د ا فرض شود پس این سطح را با کره مشارکت

نیت خرد بهمان نقطه $ا$ پس تماس است بر سطح (تعریف ۳)
 برعکس هرگاه سطح $د$ را $م$ تماس که باشد عمود شود بر طرف شعاع $م$ آن نقطه تماس
 وصل شود زیرا که چون نقطه $د$ از این سطح را بر مرکز وصل کنیم بر آن نقطه خارج کرده است $م$
 اطول شود از شعاع $ا$ پس شعاع اقصر خطی باشد که بتوان از نقطه $م$ بسط $د$ وصل نمود
 و بنا بر این عمود باشد بر این سطح
 نتیجتاً بر نقطه مفروض از کره پیش از یک سطح تماس بتوان رسم نمود

قضیه ششم

فصل مشترک ما بین دو کره متقاطعه دایره است و این دایره سطحش عمود
 باشد بر خط المکررین مرکزین و اقی باشد بر این خط



بر خط $د$ وصل ما بین دو مرکز
 دو کره سطحی مورد دید و آن قطع کند دو
 کره را بر دو دایره عظیمه متقاطعه بر دو نقطه
 و آن که قرین اند نسبت به خط $م$

حال چون و نصف دایره $د$ را $ا$ را حول $م$ دور آن دو نیم دو سطح کره بود
 آید و نقطه $ا$ بر خط فصل مشترک آن سیر کند و در این حرکت طول خط $ا$ تغییر نکند و
 عمود باشد بر $م$ پس فصل مشترک دو کره دایره باشد بر مرکز و شعاع $ا$ و سطح عمود باشد
 نتیجتاً بحسب آنکه دو دایره $ا$ و $ب$ امتحان خارج باشند یا متداخل یا تماس داخل یا بیرون
 خارج یا متقاطع اند و کره متقاطع باشند یا تماس داخل یا بیرون یا بیرون
 پس در هر کدام از این اوضاع که دو کره نسبت به یکدیگر میکنند همان و احوالی که در وضع نظیرش از دو
 ما بین المکررین و دو شعاع دایره بود این ما بین المکررین و دو شعاع کره محقق است

تقریف

۱- زاویه دو قوس عظیم عبارت است از زاویه دو سطحی حادثه باین دو سطحی و اندوختن ضلعین زاویه است و نقطه تلاقی رأسش

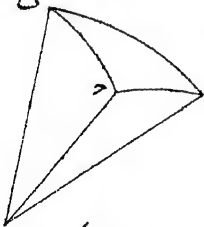
۲- مثلث کروی یا قوسی قطعه است از سطح کره محصور باین سه قوس عظیمه کره را چون خیمه منوب کنیم باید که گشتی ولی معروف کرویست و آن قوسها را اضلاع مثلث کوییم و فرض نیست که هر کدام اقصر باشد از نصف دایره و زوایای حادثه باین قوسها را زوایای مثلث کوییم

۳- مثلث کروی قائمه الزاویه باشد و مساوی الساقین و مساوی الاضلاع و موازی همان تعریفی در خصوص مثلث مستقیم الاضلاع ذکر شده

۴- بیشتر الاضلاع کروی قطعه است از سطح کره محصور باین چند قوس عظیمه و ما اعتبار کنیم جز محدثان را یعنی آنهارا که سطح هر ضلعی شان واقع شود و یک سمت تمام شکل

قضیه چهارم

دو مثلث کروی اب و ج ضلع اقصر باشند از مجموع دو ضلع دیگر
برهان- نقطه مرکز کره است و اشعه او ب و ج و



را رسم میکنیم و سطوح اب و ج و ج ب را توهم میکنیم پس این سطح بر نقطه زاویه مجتمعه ترکیب کنند که دقیقاً زوایای سطحی اش

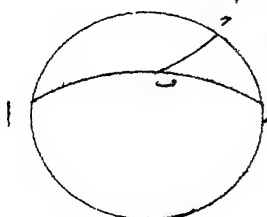
اب و ج و ج ب و ج ب اضلاع اب و ج و ج باشد از مثلث کروی اب ج و چون در هر زاویه مجتمعه هر زاویه سطحی اش کوچکتر باشد از مجموع دو زاویه دیگر و ۳ و ۳ و ۳ پس هر ضلع مثلث اب ج اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر

قضیه پنجم

مقاله هفتم

۲۱۸

مجموع اضلاع هر مثلث کروی اقصا باشد از محیط عظیمه

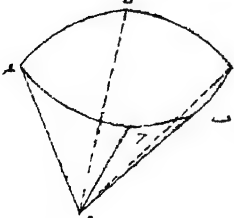


برونها - اب در مثلث کرویست و دو ضلعش اب و ا ح را امتداد میدیم تا نوبت دیگر بر نقطه متلاقی شوند پس دو ضلع اب و ا ح هر کدام نصف عظیمه باشد چونکه دوایر عظام منصف همیگردانند و ا و ح در مثلث ح ا ح

این نامساوات حاصل است $ح ا ح + ح ا ح + ح ا ح + ح ا ح$ و چون بر طرفینش اب + ا ح اضلاع کنیم چنین شود $ا ح + ح ا + ح ا + ح ا + ح ا + ح ا + ح ا + ح ا$ یعنی مجموع سه ضلع اقصا باشد از محیط عظیمه بقیه شرط لازم و کافی در امکان ترسیم مثلث کروی تا سه ضلع مفروض انیت که مجموع اضلاع اقصا باشد از محیط دایره و ضلع اطول که چنانچه باشد از مجموع دو ضلع دیگر زیرا که این شروط لازم باشند و کافی در امکان ترکیب زاویه مجمله از زاویه سطحی که میباشند همان اضلاع مفروض باشند پس از ترکیب این زاویه چون درش برابر مرکز کره قرار دهیم اضلاعش مثلث مطلوب را از کره جدا میکنند

قضیه ششم

مجموع اضلاع کثیر الاضلاع کروی تحت اقصا باشد از محیط عظیمه



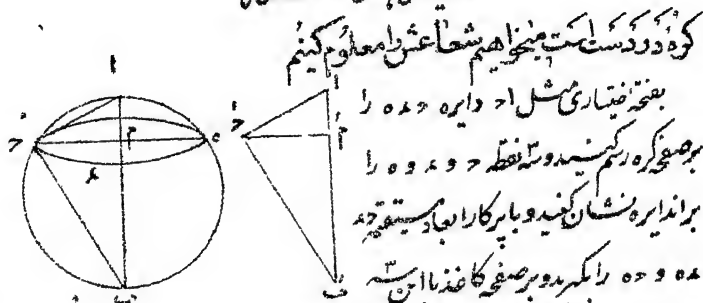
برونها - اب ح د ه کثیر الاضلاع کروی محبب است و از مرکز م کره اش د م ا و م ب و م ج و م د و م ه را وصل میکنیم تا زاویه مجمله محبب ترکیب شود که معیاس زاویه ای سطحی است $ا م ب + م ب ج + م ج د + م د ه + م ه ا$ و غیره اند و چون مجموع روای سطحی هر زاویه مجمله کمتر است از $م$ قائم پس مجموع اب و ب ح و ح د و د ه و ه ا و غیره کمتر است از محیط عظیمه

مقاله کشف

۲۲۰

و زاوئی بتعیین موده اند تا بتوان و نکوش را نسبت به هم دیگر مایل نمود
و ظاهراًست که چون نوکی از این پرکار را بر م قرار دهیم و نوک دیگر را بر م و در آنش نیم جول
نقطه م طرف دایره دهم را رسم کنند

و چون خواستیم اقطاب م دایره عظیمه اصوب را رسم کنیم باید فاصله مابین و نوک پرکار را
برابر بگیریم با وتر ربع محیط و در این بین بعد باید شعاع م که معلوم باشد و اکنون این مسئله را رسم
قضیه ششمه مسئله



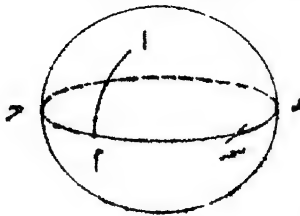
ضلع مثلثی رسم نمایند و شعاع دایره محیط بر آن مثلث بجهت شعاع دایره ده ده باشد
و بعد بر م بر قطر اد کره دایره عظیمه اد ف را در وردهای خطوط ح ا و ح ب
و د م را وصل نمایند و وقت ظاهراًست که از مثلث قائم الزاویه موهوم د ا م و ترا د ضلع د
معلوم پس میتوان بر صفحه کاغذ مثلث د ا م را همان دای د ا م رسم نمود و چون خط ح ب
در کره عمود است بر د ا پس اگر عمود د ف برابر د ا را رسم کنیم و امتدادش رسم کنند د ا م را
کنند خط ا ب برابر شود با قطر اد کره

قضیه ششمه مسئله

بر صفحه کره دو نقطه ا و ب فرض شده و میخواهیم دایره عظیمه بر آنها مماس شود و همیشه
این دو نقطه را دو قطب فرض نموده و مکرراً شعاعی برابر وتر ربع محیط عظیمه دو دایره رسم

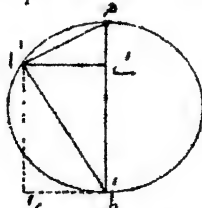
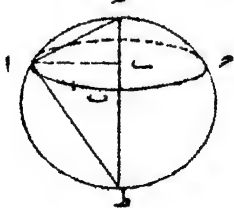
میکنیم تا بر نقطه $ق$ متقاطع شوند و این نقطه قطب قوس
عظیمه $اب$ باشد و از مرکز قوس $م$ طوب را رسم کنیم
قضیه چهارم مسئله

میخواهیم از نقطه $ا$ مفروضه بر صفحه کره $ا$ این عظیمه فردا و رسم عمود بر عظیمه دیگر
از قطب $ب$ شعاعی برابر وتر ربع محیط قوسی رسم کنید تا
دایره مفروضه $د م$ را بر نقطه $د$ قطع کند و بعد از
قطب $د$ و شعاع $د م$ قوس عظیمه $ا م$ را
رسم کنید که عمود باشد بر $د م$ و $ب$



قضیه پنجم مسئله

سه نقطه $ا ب و د$ بر صفحه کره فرض شده $ا$ میخواهیم دایره صغیره بر آنها مر و $د$ هم



با یکدیگر فاصله $ا ب$
و $ب د$ و $ا د$ را بگیرد و بر صفحه
با این که ضلع مثلثی رسم نماید و
دایره بر آن محیط کند شعاع

این دایره برابر شعاع دایره است که میخواستیم بر صفحه کره رسم کنیم

حال بوی هم قطر $د ط$ را عمود میکنیم بر سطح دایره $ا ب د$ و آن سطح این دایره را قطع کند بر مرکز
خطوط $ا د و ا ب و ا ط$ را وصل میکنیم پس ظاهر است که مثلث $د ا ط$ قائم الزامی
بر $ا$ و از اجزایش وتر $د ط$ و ارتفاع $ا ط$ معلومست

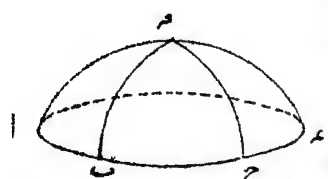
و در رسم این مثلث بر صفحه کاغذ دایره رسم کنیم قطر $ش د ط$ مساوی باشد با قطر کره و بر
خطی مماس میگیریم طول شعاع دایره $ا ب د$ و خط $د ا$ را موازات $د ط$ رسم میکنیم

وایره برابر قطع کند و خط $ا د$ و $ا ط$ را وصل میکنیم پس $ا د ط$ مثلث مطلوب است
و ضلع $ا د$ برابر $ا د$

و در تعیین قطب و از دایره $ا ب ح$ از اقطاب $ا$ و $ب$ و $د$ و شعاع $ا د$ را قوسیم
کنیم تا بر نقطه مطلوبه میفتاح شوند و چون قطب بدست آمد باقی عمل اشکال ندارد
قضیه دوازدهم

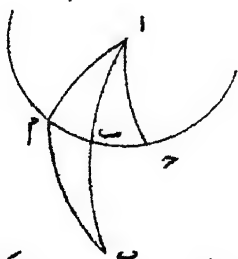
در سطح کره اقصی فاصله مابین دو نقطه $ا$ و $ب$ قوسی است از دایره عظیمه که از
نصف محیط واصل مابین اند و نقطه
برهنا - این قضیه مبنی است بر دو مقوله

اول - اقصی فاصله قطب که از جمیع نقاط محیط $ا ب$ یک است
ظاهر است که این حکم لازم است و ای قسیمی دوایر عظم
و $ا$ و $ب$ است و لازمست قمارن مای که کره حول



نقطه قرار دارد
دوایر $ا ب$ و $ا د$ دو قوس عظیمه اند که کلام

کمز از نصف محیط و فرض اینست که $ا د$ $ا ب$ پس گوئیم که اقصی فاصله مابین $ا$ و $ب$
کو تا به تراست از اقصی فاصله مابین $ا$ و $ب$

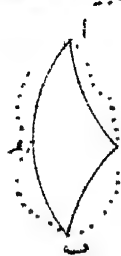


برهنا - از قطب $ا$ و شعاع $ا د$ وایره $ا ب$ را قسیم
و آن بسته قطع کند قوس $ا ب$ را بر نقطه $د$

مابین $ا$ و $ب$ و اقصی فاصله مابین $ا$ و $ب$ را
 $ا ب$ فرض کنیم آن خط قطع کند وایره $د$ را

بر نقطه $م$ و خط $ا م$ اقصی فاصله باشد مابین $ا$ و $م$ چونکه اگر مابین این دو نقطه خطی دیگر

بود پس ا م ب اقصر فاصله می شد باین ا و ف و این خلاف فرض است و بنا بر مقدمه
سابقه اقصر فاصله باین ا و م برابر باشد با اقصر فاصله باین ا و ج پس اقصر فاصله از ج
کجاست و ترست از اقصر فاصله همان نقطه ا از ب **فهمی المطلب**
بعد از آن مقدمه اب قوسی است از دایره غیر کوتاه تر از نصف محیط و ا ب این دو نقطه ا و ب



و فرض کنیم خارج این قوس واقع باشد نقطه ا اقصر فاصله باین ا و ب
و آن نقطه است و دو قوس عظیمه ا و ب داریم می کنیم و ا را
مساوی ا ه جای کنیم آنوقت و ا ب ا ه و ج و چون از
طرفین موضوع کنیم $ا = ا ه$ و باقی میماند $ا ب و ج$

و بنا بر مقدمه اول اقصر فاصله از ا مساویست با اقصر فاصله از ه و چون نقطه ج
متعلق است به خط اقصر فاصله باین ا و ب لازم آید که فاصله ج از ب اقصر باشد از فاصله
ه از ب و این نتیجه بنا بر مقدمه دویم محالست چونکه قوس ب ه اقصر است از ب ه پس ج
نقطه از خط اقصر فاصله باین ا و ب نتواند خارج قوس اب واقع شود پس خود این قوس
اقصر فاصله باشد باین طرفین ا و ب

پس نتیجه در برانند که هر کدام از ه و قوس ا و ب را اقصر از اب فرض نمودیم و ظاهر
که غیر از این نتوان فرض نمود زیرا که اگر ا ه ا ب میبود خط اقصر فاصله باین ا و ب کوتاه
تر میشد از اقصر فاصله باین ا و ج پس نقطه ج ممکن نبود متعلق باشد به خط اول

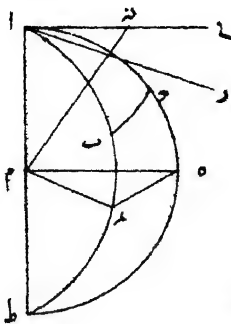
قضیه سیزدهم

مماسی بر دایره با ا حاد ثنائی باین دو قوس عظیمه اب و ا ح زایویه و ا ح است
خادش باین دو خط مماس ب نقطه ا از اند و قوس نیز مماسی است قوس
ه است هر دو از قطب ا ب این دو ضلع اب و ا ح که وقت ضرورت امتداد

مقاله پنجم

۲۲۴

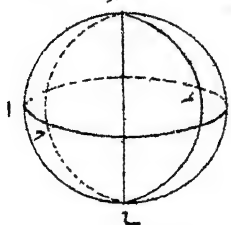
داد که میشوند



برونها خط مماس از مرسوم در سطح قوس اب عمود باشد
بر طرف شعاع ام و خط مماس از مرسوم در سطح قوس
اح عمود باشد بر طرف همان شعاع ام پس زاویه زاح
مساوی باشد با زاویه جاد باشد با این دو سطح م اب و م اح
و از زاویه دو قوس اب و اح باشد که بتصرف مساوی شود

بکذا اگر دو قوس ام و اه هر کدام ربع محیط باشند و خط م د و م ه عمود شوند بر م ا
و زاویه م د م مساوی شود با زاویه دو سطح ام د و ام ه پس قوس م د م قیاس زاویه اندر سطح
باشد یا قیاس زاویه ج اب

نتیجه - زوایای مثلثات کروی میتوان به یکدیگر بنحیض زوایای قوسی و دایره عظامیکه از رؤس
بجمله قطب یا این ضد رؤس آن رسم شود و آن نسبت را میتوان در سطح کره زاویه مساوی زاویه دیگر رسم نمود



شرح - هر دو زاویه مقابل بر رؤس مثل ا د سه و ب ج
مساوی باشند چون که هر دو حادث شده اند از تقاطع
سطح اب د و سه ج

و نیز ظاهر است که در تقاطع دو قوس ا د ب و سه ج

دو زاویه مجاوره ا د سه و سه ج مجموعا معاد است با دو قائمه

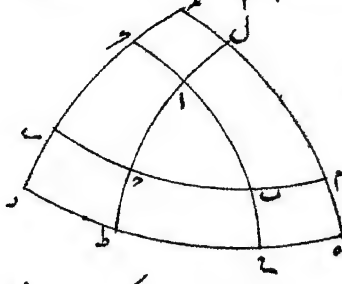
تقریب

در مثلث کروی اب د چون از قطب اب و ج قوسی دایره عظام ه ر و د و ه
را رسم کنیم تا متقاطع شوند مثلث جدید م د ب را مثلث قطبی اب د گوئیم
و رؤس نظیرا نقطه تاقی اند و قوس است که از دو قطب ب و ج رسم شده انقباضی است

فوس بر دو نقطه متقاطع شوند ولی باید آن نقطه را اختیار نمود که با نقطه ا در یک سمت ج افتاده باشد و همین ج خطایر دور را پس دیگر را نیز خطایر دور را پس

قضیه چهارم

هرگاه قطبی مثلث ا ب د مثلث عه د باشد گوئیم بعکس مثلث ا ب د قطبی



د راست
برهان - چون نقطه ا قطب قوس د راست
فاصله ا ب ربع محیط است چون نقطه د قطب
قوس د است فاصله د ب نیز ربع محیط است
پس فاصله نقطه ا ب و د و نقطه ا د و ربع محیط

پس این نقطه قطب باشد قوس ا د را و علاوه بر آن هر دو نسبت به ا د در یک سمت واقع
و همین وجه ثابت میشود که د قطب است قوس ب د را و قطب است قوس ا ب را پس
ا ب د مثلث قطبی شد عه د را

قضیه پنجم

در دو مثلث قطبی ا ب د و عه د مقیاس هر زاویه یکی از اند و مثلث
محیط است منهای ضلع مقابلش از مثلث دیگر

برهان - دو ضلع ا ب و ا د را امتداد دهیم تا ه و د ا بر دو نقطه ط و ط تعلق کنند
و چون نقطه ا قطب است قوس ط را مقیاس زاویه ا ع ه ط باشد و چون
نقطه ه قطب است و نقطه د قطب است دو قوس ط و د هر کدام ربع محیط
باشد پس ط و د نصف محیط باشند و چون مقدار کدو مساویست با ه و د ط
پس قوس ط را مقیاس زاویه ا مساویست با نصف محیط منهای ضلع ه و د و همین

مقیاس زاویه ب نصف محیط است منهای مد و مقیاس زاویه د نصف محیط است منهای مد

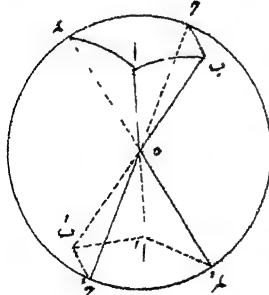
این حکم در دو مثلث هفتی اصل و عکس است چنانکه این دو مثلث یکوجه از روی هم بکوبیم شوند و از استقرار در مثلث مد و مقیاس زاویه ای مد و د باید بوده باشند نیز
 پ محیط - ب د و پ محیط - اد و پ محیط - اب زیرا که مثلث زاویه مد مقیاس
 م - است چون م - + ب د = م + د = پ محیط پس قس م -

مقیاس زاویه مد = پ محیط - ب د و همچنین در سایر زوایا
 شرح - چون از مرکز کره اشعه وصل نمایم بر بخش د و مثلث اب د و مد و دو
 سه سطحی ترکیب شود که مقیاس زاویه ای سطحشان ضلع د و مثلث کردی باشد و زاویه ای د
 سطحشان بمسبب زاویه ای همانند و مثلث باشند

و بنا بر حکم مذکور در این دو زاویه سه سطحی زاویه ای دو سطحی هر کدام مکمل سطح د و ب باشند
 و بالعکس پس این دو زاویه سه سطحی مکمل هم یکدیگر باشند

تعریف

ا ب د و کثیر الاضلاعی است گروهی از مرکز
 کره اشعه بر بخش وصل میکنیم تا از طرف دیگر کره را
 قطع کنند بر نقاط ا و ب و د و زاویه ای
 دو زاویه مجامعه بر مرکز ه قرارند باشند



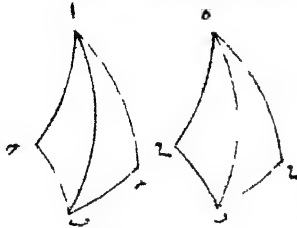
و بنا بر این زاویه ای سطحی زاویه ای دو سطحی است مساوی باشد پس و کثیر الاضلاع گروهی ا
 و ا ب د نیز در جمیع اجزای مساوی باشند و با وجود آن بر هم دیگر منطبق نشوند زیرا که چون
 ضلع د را بر مساویش د نقل کنیم چنانچه سایر اضلاع د و د شکل د و یک سمت د د فضی

و با یکدیگر ا ب و ب
 و ا د و د ح د

نقطه بر واقع می شود و چون ابتدا از دو کثیر الاضلاع را در کجته به پیماییم می بینیم که
اضلاع و زوایا عکس ترتیب واقع می شوند
چنین دو کثیر الاضلاع را قریه یکدیگر گوئیم هر وضع در روی کره نسبت به یکدیگر واقع شوند

قضیه شانزدهم ۱۶

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کره متساویه هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها
نظیر بنظر متناوبی باشند سائر اجزای شان متناوبی میشوند



برها - فرض میکنیم ضلع اب = ه ر ضلع ا ج

= ه ر زاویه با د = ه ر یس بدلیل انطباق

مثلث ه د ر را میتوان بر مثلث اب د نقل نمود

همانطور که برهم منطبق گردید و مثلث ه د ر ضلعای

که دو ضلع و زاویه بینشان متساوی بود پس جمیع اجزای مثلث ه د ر مساوی شود جمیع

اجزای مثلث اب د یعنی علاوه بر آن جزئی که متساوی فرض شد پس این جزئی نیز متساوی شود

ب د = ه ر و زاویه اب د = ه ر و زاویه ا ج د = ه ر

هرگاه اضلاع متساویه دو مثلث نسبت به زاویه متساویه متناظر نباشد و عکس ترتیب باشد

آنوقت مثلث ه د ر را نقل کنیم بر قرینه اب د و با هم مبرهن شود

قضیه هفدهم ۱۷

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کره متساویه هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها

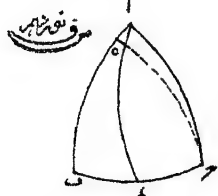
متناوبی باشند سائر اجزای شان متناوبی میشوند

برهان یکی را آنوقت مثلث را نقل میکنیم بر دیگر یا بر قرینه دیگر یعنی آنچه در دو مثلث متیقنه

الاضلاع تمایل را جاری نمودیم و ۱۷ را

قضیه هجدهم

دو مثلث واقع بر یک کره یا بر دو کره متساویه هرگاه اضلاعشان متساو باشد زوایایان نیز متساوی شوند و هر دو زاویه متساویه مقابل باشند بدو ضلع متساوی



برهان - مرکز را بر راس دو مثلث وصل میکنیم و زوایای وسطی حاصل شود که مقایسه و ایای سطحشان ضلع و مثلث که نسبت پس این سطوح نظیر نظیر متساوی باشند و قوت

زوایای وسطی مقابل با ضلع متساوی متساوی شوند و این زوایا بعینهما زوایای مثلث اند

قضیه نوزدهم

در هر مثلث کروی متساوی الساقین و زاویه مقابل به ضلع متساویان برهان - فرض میکنیم $ab = ac$ و میگوئیم زاویه $b = c$ زیرا که چون قوس a را از راس بروسطاقعه وصل کنیم در دو مثلث ab و ac اضلاع متساوی شوند ازینقرار مثلث است و $b = c$ و $ab = ac$ پس یکم قضیه سابقه زوایای متساوی گرد یعنی $b = c$ و ضمایب ثابت شد که زاویه $b = c$ و $ac = ab$ پس دو زاویه خیر قائمه پس قوس سوم از راس مثلث کروی متساوی الساقین بروسطاقعه شش عمود شود بر این قاعده و نصف کند زاویه راس مثلث را

توجه - از این قضیه نیز نتیجه شود که قرینه مثلث کروی متساوی الساقین مساوی است بطور انطباق

قضیه بیستم

دو مثلث کروی هرگاه دو زاویه متساوی باشند دو ضلع مقابل با آنها نیز برهان - در شکل سابق فرض میکنیم زاویه $b = c$ و میگوئیم $ab = ac$ و $ac = ab$ زیرا که

و ب ه را مساوی و ا ج را می کنیم و قوس ه د را وصل می کنیم حال دو ضلع ه ب و ج
از مثلث ه ب ج مساویست با د و ضلع ا د و ب از مثلث ا ب ج و زاویه ه ب ج
حادثه ما بین د و ضلع ا ق و مساوی باشند با زاویه ا ب ج حادثه ما بین د و ضلع د و ب هم پس این دو
مثلث مساوی باشند و زاویه ه ج ب = ا ب ج و لی بقضی زاویه ا ح مساوی بود با ب ج
پس ه ج ب = ا ب ج و این محالست پس ا ب و ا د مقابل با د و زاویه متساویه ب و ج متسا

قضیه بیست و یکم

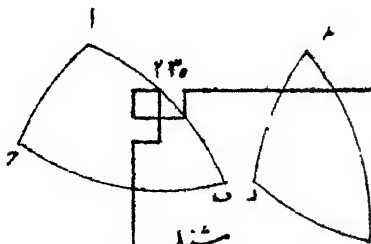
در مثلث کروی ا ب ج هرگاه زاویه ا اعظم باشد از زاویه ب ضلع ج
مقابل بز زاویه ا طول شود از ضلع ا د مقابل بز زاویه ب و بالعکس اگر ضلع
ب د طول باشد از ج زاویه ا اعظم باشد از زاویه ب

برهان - اول فرض کنیم زاویه ا اعظم باشد ب و زاویه
ب د را مساوی و ج را می کنیم پس ا د = د ب و قوس
ا د + د ب طول است از ج پس بجای ا د مساوی
ه ب را قرار می دهیم و قوس ا د + د ب یا ب ج را
ثابت - فرض می کنیم ب ج ا د و میگوئیم زاویه ب د اعظم است از ا ب ج چونکه اگر مساوی
لازم می آید که ب ج = ا د و اگر کوچکتر باشد بنا بر آنچه اکنون ثابت رسید ب ج > ا د و
خلاف فرض است پس زاویه ب د بزرگتر است از ا ب ج

قضیه بیست و دوم

هرگاه در یک کره یا دو کره متساوی یک دو ضلع ا ب و ا د از مثلث ا ب ج
مساوی باشد با د و ضلع ا د و ا د از مثلث ا د ه و زاویه ا اعظم باشد
از د ضلعی سیم ب ج از مثلث ا ق ل طول می شود از ضلع ه د از مثلث د ق ل

مقاله هفتم



بنویسند اینک معین بنیانت که ذکر شد است در وای
قضیه بیست و نهم

هرگاه دو دایره که یا دو کمان متساوی و یک دایره و یا یک دایره و یک کمان متساوی باشد
در اضلاعشان غیر متساوی میشوند که
برهان - دو مثلث مفروض α و β باشد و دو قطبی آنها γ و δ و چون در دو مثلث اول و α
متساوی فرض شدند اضلاع دو قطبی γ و δ متساوی گردند و β و در این دو مثلث چون
اضلاع متساوی شدند و یا شان متساوی گردند و γ و δ و یا یکی از مثلث متساوی
گشتند اضلاع دو قطبی آنها γ و δ متساوی گردند و β پس دو مثلث متساوی الزوایا α
 γ و β متساوی به اضلاع غیر باشند

مشرح - اینک در مثلثات مستقیمه الاضلاع تحقیق نمویست علی الزوایا شان همین
شائب اضلاع لازم آمد ولی میتوان بحث دیگری در یافت و سبب این اختلاف بین الزوایای
مستقیمه الاضلاع و کروی را معلوم کرد در قضیه حالیه بود در قضایای α و β و γ و δ
که بحث از مقایسه مثلثات بود مخصوصاً قید شد که این مثلثات مرسوم باشند بر صفحه یک
یا دو کره متساویه و چون متشابه متشابه نسبت اشعه پس در کرات متساوی
مثلثات متشابه گشتند ناچار متساوی نیز باشند پس عجب نیست که از متساوی الزوایا
متساوی اضلاع لازم آید

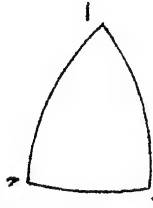
ولی اگر مثلثات بر کرات مختلفه رسم شوند حکم چنین ثابت شود وقت بر فرض تساوی
زوایا مثلثات متشابه گردند و اضلاع متناسب گردند بر نسبت اشعه کرات

قضیه بیست و دهم

اولاً مجموع زوایای هر مثلث کروی یا صغیر یا شذاع قائمه و اعظم از 2 قائمه

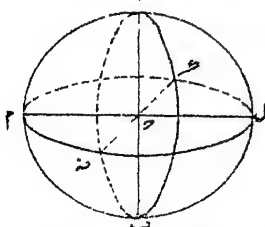
ثانیاً چون بر اصفه‌شان دو قائمه اضافه کنیم حاصل اعظم باشد از مجموع
دو زاویه دیگر

برهان اول چون مقیاس بر زاویه مثلث کروی مساویست نصف محیطهای ضلع مقابلش
از مثلث قطبی و این مقیاس مجموع سه زاویه مثلث مساوی باشد با نصف محیطهای
مجموع اضلاع مثلث قطبی پس چون مجموع ثانی اقصر است از یک محیط پس بعد از وضعن از سه
نصف محیط باقی اقصر شود از سه نصف محیط و اول از یک نصف محیط پس مجموع زوایای
مثلث اصفه باشد از سه قائمه و اعظم از ۲ قائمه



فیتجه مثلث کروی ممکن دارای دو یا سه زاویه قائمه باشد
پس اگر مثلث ا ب ج دو زاویه اش ب و ج قائمه باشد
قطب باشد قاعده ب ج را اوقت و وضع ا ب و ا ج کنیم

ربع محیط شوند و اگر علاوه بر آن زاویه قائمه باشد مثلث ا ب ج جمع زوایش قائم شوند



واضعا شش بر کدام ربع محیط و سطح چنین مثلث من
سطح کره می شود و آنچنین از روی شکل ظاهر آید و شش ربع محیط
ثانیاً ۶ و ۷ و ۸ و ۹ زاویه مثلث است و کوچکتر

از سایر فرض شده پس ۱۱۵ - ۷ و ۱۱۵ - ۸

و ۱۱۵ - ۹ اضلاع مثلث قطبی اش باشد و این نامساوات حاصل شود

$$۱۱۵ - ۷ > ۱۱۵ - ۸ + ۴ - ۱۱۵ + ۵ - ۱۱۵$$

و چون بر طرفین ۷ + ۴ + ۵ اضافه کنیم و ۱۱۵ بکاهیم این نامساوی حاصل شود

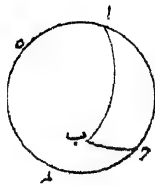
$$۷ + ۴ + ۵ > ۱۱۵$$

با سه زاویه ۷ و ۸ و ۹ که بر وفق شرط مذکور باشد نمیتوان مثلثی کروی رسم نمود زیرا

مقاله مفتقر

۲۳۲

که خط این دو شرط لازم باشد و کافی در تمام زاویه سطحی از روی زوایای وسطی و مدور
 شرح - آنچه اکنون ذکر شد بر این فرض بود که اضلاع مثلث کروی هر کدام برابر باشد نصف
 محیط دایره مثلثاتی است که بعضی اضلاعشان اطول باشد از نصف محیط و بعضی نه و یا شان اعظم
 از دو قائمه زیرا که چون ضلع او را امتداد دهیم تا دایره اده تمام نشود آنچه بعد از وضع مثلث
 اب ح از نصف کره باقی ماند مثلث تازه است که باز بر نصف اب ح نموده شود ولی ضلع
 اب است و ب ح و ا ه و پس ظاهر است که ضلع ا ه د اطول باشد از نصف محیط
 ا ه د و زاویه مقابلش ب اعظم از دو قائمه بقدر ح ب د
 نکته آنکه از تعریف خارج نموده می شود مثلثاتی که اضلاع زوایا شان یفقد بر بزرگ باشد
 که راه حل و تعیین اضراشان بجز میشود و بجل مثلثاتی که تعریف در آنها صدق کند زیرا که چون
 زوایا و اضلاع مثلث اب ح معلوم شد ظاهر است که ضمنا معلوم شود اضرائی مثلث
 که بهمان نام باشد و باقی نصف کره باشد بعد از وضع مثلث



تعریف

- ۱- قاعده قطعه است از سطح کره و واقع بین دو نصف دایره عظیمه که منتهی باشد نقطه‌ای مشترک
- ۲- اقلیدس کروی قطعه است از حجم کره که واقع شده بین همان دو نصف دایره و مانند کوره‌ها
- ۳- هر کم کروی قطعه است از حجم کره که واقع باشد بین بطوح زاویه محب و رانش بر مرکز کره باشد
 و قاعده اش کثیر الاضلاع کروی که محصور باشد بین انسطوح
- و چون و کثیر الاضلاع کروی بر یکدیگر منطبق شوند و هر هم منطبق باشند و قاعده تیر توانند برهم
 منطبق شوند
- ۴- دو هر کم کروی و قریه کوئیم هرگاه دو کثیر الاضلاع قاعده آنها قریه یکم باشند
 قضیه یکم و یکم

نسبت قیاس ۴۸ م د با سطح کره مثل زاویه ۴۸ م د باشد از این قیاس چهار زاویه قیاس
و یا مثل قوس ۴۸ م د مقیاس از زاویه باشد بمحیط عظمه
برقش در شکل سابق فرض میکنیم قوس ۴۸ م د را نسبت منطقی بمحیط ۴۸ م د که باشد
چون محیط برابر ۴۸ جزء متساوی است کیم بقوس شامل پنج عدد از آن اجزای شود پس
نسبت قوس ۴۸ م د بمحیط $\frac{۵}{۴۸}$ باشد

حال سطوحی چند بر قطرب و بر نقاط تقسیم میکنیم تا سطح کره بر ۴۸ قیاس قسمت شود
و همه متساوی باشند چون نوایان مساویست و ظاهر است که پنج عدد از این قیاسها در تمام
بجز نسبت این قیاس به سطح کره نیز $\frac{۵}{۴۸}$ باشد و بنا بر این نسبت قوس ۴۸ م د باشد بمحیط
و اگر قوس ۴۸ م د را نسبت منطقی بمحیط باشد میتوان مثل آنچه سابق در مقام خود
ذکر شده باز بر همین دو که نسبت قیاس به سطح کره مثل قوس ۴۸ م د باشد بمحیط

در تعیین قیاس قیاس

فرض میکنیم ۴۸ و ۴۸ دو قیاس باشند و ۴۸ و ۴۸ دو زاویه آنها پس حکم مذکور

$$۴۸ : ۴۸ = ۴۸ : ۴۸$$

$$۴۸ : ۴۸ = ۴۸ : ۴۸$$

$$۴۸ : ۴۸ = ۴۸ : ۴۸ \quad (۱)$$

پس چون خواهیم قیاس را مساحت کنیم باید که بمحیط قیاس دیگر واحد فرض شده باشد از روی
شائبه مذکور نظر بشود که گاهی است نسبت زاویه اش از زاویه قیاس واحد معلوم کنیم
فرض میکنیم ۴۸ واحد قیاس زاویه اش قائم باشد پس شائبه (۱) چنین میشود

$$\frac{۴۸}{۴۸} = \frac{۴۸}{۴۸} \quad (۲)$$

و بنا بر این نسبت قیاس مفروض قیاس قائم مساوی باشد با نسبت زاویه اش از زاویه قائمه و آن

مقاله نخست

۲۳۴

معنی این عبارت را اینگونه می‌فهمیم هر قاعده زاویه و است
و چون مثلث م را که بر سه زاویه اش قائمه باشد و اضلاع فرض کنیم و آن نصف قاعده باشد
و در تساوی (۲) بجای د قرار دهیم م را چنین شود

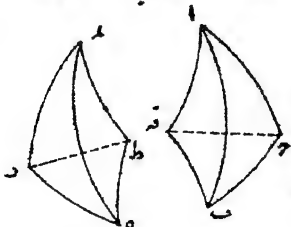
$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

و چون طرفین را در دو ضرب کنیم چنین شود

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

پس نسبت قاعده مضاعف نسبت به مساحت قائمه است نسبت مضاعف زاویه اش بر زاویه قائمه
و عبارت خری می‌فهمیم هر قاعده مضاعف زاویه و است

مشرح - همین وجه ثابت می‌شود که نسبت اکلین مجسم که مثل زاویه و است چهار قاعده و بر سه
جمله اکلین زاویه و است بنابر آنکه واحد حجم اکلین قائم باشد و واحد زاویه زاویه قائمه باشد
مقیاس مضاعف زاویه و است بنابر آنکه واحد حجم هر مثلث القاعده است قائم باشد و آن نصف اکلین
قائم است و واحد زاویه زاویه قائمه



قضیه بیستم

دو مثلث که روی قریبه بمصاحبت مساوی باشند

برها - اب - و - و دو مثلث قریه است و نشان

این ترتیب مساوی باشند اب = ده و اد = ده و د ب = ده ولی برهم منطبق نشوند

و کو نیم سطح اب د = ده

نقطه د قطب دایره صغیره باشد مرکز د بر سه نقطه ا و ب و (دایره که بر این نقطه می‌گذرد)

و محیط د بر مثلث اب د حکماً صغیره کرده است زیرا که اگر خطی می‌گذرد هر ضلع اب و ب د

و ا در یک سطح واقع می‌شوند و آنوقت مثلث اب د مبدل می‌شود یکی از اضلاع خود (و آنرا

نقطه قوسهای مساوی و ا و ق ب و ق د را وصل نمایند و بر نقطه د زاویه د و ط را مساوی
 ا د و ر کیم که قوس د ط را مساوی ا د بداند و دو قوس د ط و ه ط را وصل
 پس در دو مثلث د و ط و ا ق د دو ضلع د و ط و زاویه د و ط مساویست با د
 ضلع ا د و ق د و زاویه ا ق د و سایر اجزای متساوی شوند و عا پس ضلع د ط = ا ق د و
 زاویه د ط ر = ا و د

و در دو مثلث مفروض د و ه و ا ح ب چون دو زاویه د و ه و ا ح ب متعابله بدو ضلع
 د و ه و ا ب مساوی شد بعد از وضع دو زاویه مساویه د و ط و ا ح ق باقی ماند زاویه ط
 و ه = ق د ب و از خارج د و ضلع ط و و ه مساوی شد با د و ضلع ق د و ح ب
 پس دو مثلث د ط ه و ح ق ب سایر اجزای متساوی شود ضلع ط ه = ق ب و
 زاویه د ط ه = ح ق ب

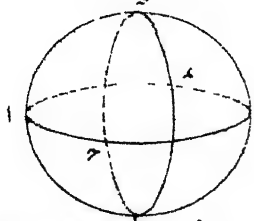
حال چون ملاحظه کنیم که دو مثلث د و ط و ا ق د که از ضلعشان نظیر نظیر متساوی شدند و
 السابق این معلوم میشود که میتوان یکی را بر دیگر منطبق نمود پس متساوی شوند و ط ر = ا و د
 و همین دلیل سطح د ط ه = ح ق ب و سطح د ط ه = ا ق ب پس
 د ط ر + د ط ه - د ط ه = ا و د + ح ق ب - ا ق ب یا د و ه = ا ح ب پس دو مثلث
 قرینه بحسب وسعت متساوی شدند

شرح - ممکن است دو قطب د و ط در درون و مثلث ا ب د و د و ط واقع شوند
 و در صورتی که مثلث د ط ر و د ط ه را بر هم افزودن مثلث د و ط ترکیب شود
 بکدام مثلث ا ق د و ح ق ب و ا د ب را برای ترکیب ا ب د ولی دلیل بر جرات

۲- همین وجه ثابت میشود تعادل جسم دوهرم کروی قرینه

قضیه کلیت و مقتر

چون دو دایره عظیمه ا و ب و ح و د در نصف کره ا و ب و د متقاطع شوند
مجموع دو مثلث متقابل ا و ب و ح و د مساوی شود بنا بر این که زاویه ا و ب و د با
برها - چون دو قوس قوس و د و راد نصف دیگر کره



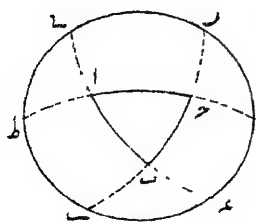
امتداد و نیم تا ملاقی شوند بر نقطه ط قوس ا و ب ط
نصف دایره شود و همچنین قوس ا و ب و چون از طرفین
قوس را وضع کنیم باقی ماند ب ط = ا و بهمین دلیل

ا ط = ح و د و ب = ا ح پس دو مثلث ا و ب و ح و د اضلاعشان متساوی شوند و چون
وضعشان قریب است بحسب قسمت مساوی گردند و ۲ و مجموع دو مثلث ا و ب و ح
معادل شود بنا بر این که هر زاویه ب و د است

شرح - بهین وجه ثابت میشود که دو هر کم کروی که بر دو قاعده مثلث ا و ب و ح و د
باشند مجموعشان معادل شوند بنا بر این که هر زاویه ب و د باشد

قضیه بیست و ششم

مقیاس سطح هر مثلث کروی فی فضل مجموع سه زاویه و است بر دو زاویه قائمه
برها - مثلث مفروض اب ح است و اضلاعش



امتداد و نیم تا ملاقی کنند دایره عظیمه مثل ا و د را که در
خارج مثلث فرض شده پس بر مقتضای قضیه سابقه

$$ا و د + ا ح ط = ا ح ط$$

$$ب و د + ب ح ط = ب ح ط$$

$$ح و د + ح و ب ط = ح و ب ط$$

چون این سه مساوی با هم جمع کنیم و ملاحظه نماییم که مجموع شش مثلث از نصف کره خارج

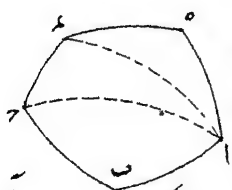
مقاله هفتم

۲۳۸

تعیین شود مثلاً یک عدد نشان دهد و واحد کمتر از عدد اضلاع آن باشد و مقیاس سطح بر مثلث
مجموع زوایای او است بر دو قائمه و چون مجموع زوایای مثلثات برابر است با مجموع
زوایای کثیر الاضلاع پس مقیاس سطح کثیر الاضلاع فضل مجموع زوایایش باشد بر انقدر
دو قائمه که عدد اضلاع کثیر الاضلاع منهای دو یعنی بر حاصل ضرب دو قائمه در دو واحد کمتر از عدد
ضلع - فرض کنیم m مجموع زوایای کثیر الاضلاع باشد و e عدد اضلاعش پس مقیاس
سطح کثیر الاضلاع چنین شود $m - 2 = (e - 2) \times 2 = 4 - 2 = 2$

قضیه سی ام

هرگاه m عدد زوایای مجتمعه کثیر السطوح باشد و s عدد سطوحش
عدد خط الرأسها پس کویم این رابطه کلی فابین آنها محقق شود $m + s = 2 + 2n$
برهان - در درون کثیر السطوح نقطه فرض کنید و از آنجا خطوط مستقیم بر رأس جمیع زوایای
وصل نماید و همان نقطه را مرکز فرض نموده که هر توهم نماید که سطح جمیع خطوط را قطع کند بماند عدد
از نقاط و مابین این نقاط را بقسمت و ابرو عظام وصل نماید چنانچه بر صفحه که اشکال کثیر الاضلاع
نظایر سطوح جسم کثیر السطوح بنمایند و فرض میکنیم



ا ب ده یکی از آن اشکال باشد و e عدد اضلاع این شکل
پس اگر مجموع زوایای او b و c و d و e و f و g و h و i و k و l و m و n و o و p و q و r و s و t و u و v و w و x و y و z
مقیاس سطح چنین شود $m - 2 = 4 - 2 = 2$ و چون همیشه

مقیاس سطوح سایر کثیر الاضلاع گوی را بدست آوریم و بهر اجمع کنیم نتایج چنین بدست آید
که مجموع آنها یعنی سطح که بحسب مقیاس علامت شد 18 است مساوی شود با مجموع زوایای
اشکال کثیر الاضلاع منهای مضاعف عدد اضلاعشان و بعداً و e که بعد سطوح که از
و چون مجموع زوایای یک عدد حول یک رأس مثل 180 در زوایای مضاعف با چهار قائمه مجموع

زوایای کثیر الاضلاع مساوی باشد با m برابر عدد زوایای منجبین پس چنان باشد m و بعد مضاعف عدد اضلاع ab و b و d و غیره مساویت با چهار برابر عدد خط الراس است
 24 چونکه خط الراس ضلع وسط است پس این تساوی حاصل شود $1 = 24 - m - 24$
 $4 + m$ و چون تساوی برابر چهار قسمت کنیم $2 - m = 2 - m$ سه پس $m + 2 = 2 + 2$
 نتیجه از حکم مذکور چنین نتیجه شود که مجموع زوایای مستطی که از آنها زوایای مجتمعه گیر
 اتسطوحی ترکیب میشود مساویت با انقدر چهار ضاع باشد که برابر اعداد $2 - m$ باشد

یعنی بصورت $m \times (2 - m)$ و سابق ذکر شد که m عدد زوایای مجتمعه است
 زیرا که چون یکی از اتسطوح را منطوق آوریم عدد اضلاع ab فرض کنیم مجموع زوایای مجب
 قاعده چنین میشود $2 - m$ و چون m پانزده زوایای سطوح را اینجا جمع کنیم میزان مجموع $2 - m$
 یعنی مضاعف عدد اضلاع جمع سطوح مساوی میشود با 24 و چهار برابر عدد سطوح $= 4 - m$
 پس مجموع زوایای هر سطوح $= 4 - m$ و بنا بر حکم قضیه سه $2 - m = 2 - m$
 و چون آنرا چهار برابر کنیم $4 - m = 4 - m$ پس مجموع زوایای سطح مساوی شد با
 بر حکم مذکور چنین نتیجه تفرع شود که نه و ا راست شرح دهم

اولاً و کثیر اتسطوحی فرض میکنیم b عدد مثلثاتی باشد که در جزو سطوحش مندرج شد
 و b عدد درجات d عدد قوسهاست و غیره پس کل عدد سطوحش اینجور باشد $b + d$
 $4 + 4 + 4 + \dots$ و کل عدد اضلاعش اینجور $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots$
 و حاصل جمع ثانی مضاعف عدد خط الراسها است چونکه هر خط الراس متعلق باشد بدو

پس این مقدار $m = b + d + 4 + 5 + 6 + \dots$

$$24 = 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

و بحکم قضیه مذکور $m + 2 = 2 + m$ پس چون حاصل سه و را در این تساوی قرار دهیم چنین شود

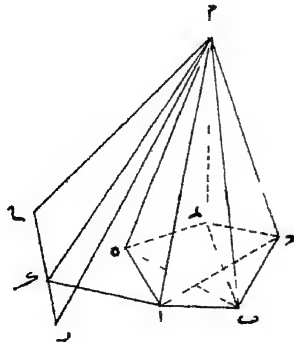
مقاله مفصله

۲۴۲

پیش را آورد و نیز میتوان وضع خط الرأس طولی مشور را نسبت بسطح قاعده اش تغییر داد و چون
این دو نوع تغییر را با هم ترکیب کنیم مشورات پشماری بدست آید که خط الرأس با وضاعا نشان میدهد
پس معلوم میشود که معرفت خط الرأسهای آنها نشان در اینجا است جسم معلوم و بسط را مشخص نمود
معلوم می شود که برای تعیین جسمی اختیارشان ننزوار باشد باید چنان باشند که وجودشان
همچو ابهام و مجهولی باقی نماند و پیش از یک جواب هم از روی آنها پوین نیاید و اول در تعیین
اب حده میان وجه معمولی که آنست که معلوم باشد ضلع اب و دوزاویه مجاوره با ح
و اب د بارزاء نقطه د و دوزاویه بیام و اب د بارزاء نقطه د و بکذا و بعد نقطه باشد
که باید موضعش در خارج سطح قاعده مشخص نمود تعیین این نقطه بجز از توهم هم م اب ح
یا سطح م اب موقوف است بمعرفت دوزاویه م اب و اب م و میل سطح م اب ح
نسبت بقاعده اب د پس چون بواسطه چنین تبه معلوم وضع برگردام از روش کثیر
در خارج سطح قاعده مشخص شود ظاهر است که یک کثیر السطح مطلق بدست آید پیش و برگرد
بوجه مختلفه از روی همان معلومات و کثیر السطح ترکیب کنیم البته تا وی باشند بلی کرد
طرفین سطح قاعده طرح شده باشند از دو قریه هم دیگر شوند
و در هر حالت لازم نیست که برای تعیین هر رأس از کثیر السطح سه معلوم و درست باشد
رنیز که اگر فرض کنیم نقطه م باید واقع شود در سطحی که سابق وضعش مشخص شده و مثلاً
مشترکش با قاعده خط بی باشد همین قدر که ما اینجا را بعد کنیم معرفت دوزاویه م د ر
و م د کافی باشد در تعیین آن نقطه و از این قرار یک معلوم کمتر لازم شد و اگر نقطه م باید
یک تیره بود و سطح مشخص واقع شود یا بر فصل مشترکشان م ل که سطح اب د را بر آن قطع نموده و بر حسب
ضلع ال دوزاویه ال د و میل سطح ال د نسبت بقاعده بر ما معلومست و از معلومات
جدید همان دوزاویه م ال د کفایت کند و نظر باین نکات است که عدد معلومات لازم در تعیین

کثیر السطحی بوجهی منتهی شود بعد خط الرأسها بش

بضلع اب و ب ج - ۱ عدد از زوایا جسم کثیر السطحی مشخص شود و بضع دیگر و بهما نزو اکثر
السطوحی متباین طرح شود بنابراین عدد شرطی که لازم باشد برای آنکه دو کثیر السطحی
هم نوع متشابه شوند برابر است با عدد خط الرأسهایش منهای واحد
مسئله که حل نمودیم مختصر تر شد اگر نوع کثیر السطح معلوم شود و قیاسی باشد بلکه همان عدد زوایا
مجموعه اش m شما معلوم بود زیرا که آنوقت از روی سه معلوم مثلثی بمیل خود یکدیگر دریم و
رشتن دست می آید و آن مثلث را قاعده جسم میگردیم و بعد عدد رؤس خارج این قاعده
 m - سه بود و در تعیین هر یک از m سه معلوم لازم بود و آنوقت عدد کل معلومات لازم
و در تعیین کثیر السطح این میشد $3 + 3(m-3)$ یا $3m - 6$
پس عدد شرط لازم در اینکه دو کثیر السطحی که عدد زوایای مجسمه شان m باشد
متشابه شوند اینست $3m - 6$



ضمیمه دوم مقاله ششم و هفتم در سطح اجسام کثیر السطوح منتظمه قضیه اول

اجسام کثیر السطوح منتظمه یکجا نباشند که نه پیش

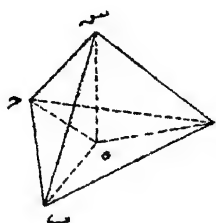
زیر که در تعریف آنها چنین گفته ایم اجسامی باشند که جمیع سطوح اطرافشان یک شکل الا اضلاع مثلثه
مساوی باشند و جمیع زوایای مجتبه شان نیز مساوی باشند و ممکن نیست صدق کنند جز در عدد
از حالات اول الا اگر سطح مثلثات مساوی الا اضلاع باشند هر زاویه مجتبه را میتوان کرکب نمود از سه
عدد و از زوایای این مثلثات یا از چهار عدد یا پنج عدد و از این ترکیب سه جسم منظم حاصل شود
چهار سطحی و هشت سطحی و بیست سطحی و پیش از این سه نوع از مثلثات مساوی الا اضلاع ششون کرکب
کریم زیرا که شش زاویه ها معادل شود با چهار قائمه و صد حیت ترکیب زاویه مجتبه را نیز میتوان
ثانیاً اگر سطح مربع باشد زوایا شان را میتوان سه سه ترکیب نمود و از آن جسم شش سطحی حاصل شود
و چهار زاویه مربع معادل شود با چهار قائمه و صد حیت ترکیب زاویه مجتبه ندارند
ثالثاً اگر سطح مختصات خط باشد زوایا شان نیز نمیتوان سه سه ترکیب نمود و آنوقت جسم
دوازده سطحی حاصل شود

و از این حد دیگر نتوان تجاوز کرد زیرا که سه زاویه مساوی منظم معادلت با چهار قائمه
و سه زاویه متبع از چهار بیشتر است

پس معلوم شد که عدد اجسام کثیر السطوح منتظمه منحصراً در پنج عدد شان مرکب
مساویه الا اضلاع و یکی از مربعیات و یکی از مختصات
شرح - و حال در قضیه ذیل میبینیم که این پنج نوع کثیر السطوح تحقیقاً وجود خارجی دارند
و چون یکی از سطوح شان معلوم باشد میتوان جمیع ابعاد و اجزایشان را مشخص نمود

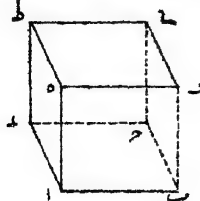
قضیهٔ مسئله

هرگاه یکی از سطوح کثیرالسطوح منتظم معلوم باشد و یا یکی از اضلاع
انجم زایچه و کعبه باید ترکیب خود و طرح کرد



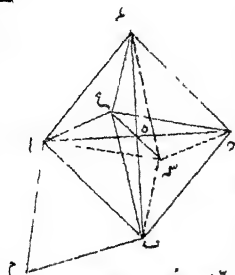
این مسئله پنج صورت دارد و ترتیب شرح می‌دهیم
در طرح و ترکیب چهار سطحی
اب - مثلث متساوی الاضلاع است که باید یکی از
سطوح چهار سطحی باشد و از نقطه مرکز آن مثلث عمود

و سه را بر سطح اب - اخراج کنیم و منتهی نمایند به نقطه سه چنانچه سه مساوی شود
اب را و وصل نمایند و خط سه ب و سه را و هر دو اب - چهار سطحی مطلوب است
بر آنها - نظریهٔ تساوی ابعاد ه ا و ه ب و ه ج خطوط مائله سه ا و سه ب و سه ج
متساویه و بعد باستند از موقع عمود سه و بنا بر این متساوی شوند و بعمل سه ا = اب = ب ج
هر چهار سطحی هر دو اب - مثلثات متساوی باشند مفروض اب - و زوایای مجتبه این
چون هر کدام مرکب شده اند از سه زاویه سطحی متساوی پس هر دو جسمی باشد چهار سطحی منتظم



در طرح و ترکیب شش سطحی
اب - مربع مفروض است و بر این قاعده منشور
قائم طرح کنیم که ارتفاعش اه مساوی باشد با
ضلع اب و در این صورت ظاهر است که سطوح

این منشور همه مربعات متساویه اند و زوایای مجتبه شش متساویه چون هر کدام مرکب اند از سه زاویه
قائم پس این منشور جسمی است شش سطحی منتظم یعنی شکل مکعب است
در طرح و ترکیب هشت سطحی

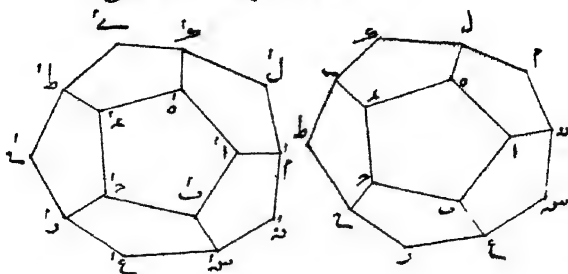


ا ب م مثل مساوی الاضلاع مفروض است و ضلع
ا ب مربع ا ب د راس هم یک و از نقطه مرکز
عمود س در بر سطح ا ب م یک کنیم و از طرفین ب
و س منتهی نماییم چنانچه $ه = س = ا ه$ و بعد
خطوط س د و س ب و س ا و غیره را وصل میکنیم

حاصل شود جسم س د ا ب د م مرکز از دو هرم مربع القاعده س د ا ب د و
ع ا ب د که بر قاعده مشترک ا ب د یکدیگر کرده اند و اینجیم شش سطحی منقسم است
به هشت مثلث ا ه س قائم است بر ه و همچنین مثلث ا ه د و اضلاع ا ه و ه س و ه
مساوی هستند پس این دو مثلث مساوی باشند و $ا ه = ا د$ و همین وجه ثابت شود
که سایر مثلثات قائم الزوایای ا ه ع و ب ه س و د ه ع و غیره مساوی هستند با مثلث
ا ه س پس جمیع اضلاع ا ب و ا س د و ا ع و غیره مساوی باشند و بنا بر این جسم س د ا ب د
محدود باشد بهشت مثلث مساوی مساوی با مثلث مساوی الاضلاع مفروض ا ب د م
گوئیم علاوه بر آن زوایای مجامع که بر السطوح مساوی باشند نیز زاویه س د مساویست با زاویه
ب ه د ظاهر است که مثلث س د ا مساوی با مثلث س د ا د و بنا بر این زاویه ا س د
قائم است پس شکل س د ا ه مربعی باشد مساوی با مربع ا ب د حال چون هرم ب ا س د
را بنجم هرم س د ا ب د قاعده ا س د ه م اول تواند واقع شود بر قاعده ا ب د
دویم و آنوقت نقطه چون مرکز مشترک است ارتفاع ه ب جسم اول منطبق بر ارتفاع
ه س د دویم و دو هرم یک حکم یک هرم میدهند پس زاویه مجامع س د مساوی شود با زاویه
مجامع ب س د جسم س د ا ب د هشت سطحی منقسم است

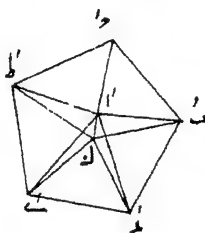
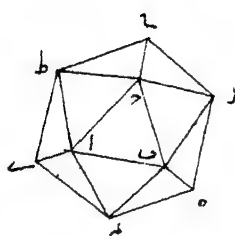
شرح - هرگاه سه خط مساوی ا د و ب د و س د مقاطع شوند و عمود بر ا و س ا

همدگر پس اطرافشان روشن است سطحی منظم باشد
در طرح و ترکیب دوازده سطحی



اب دمه محش منظم فروض است و اب ع و ج ب دوزاویه سطحی مساوی
بازاویه اب د از این سه زاویه سطحی مجتمعه را ترکیب کنید و فرض میکنیم م
یکی از این سطوح باشد نسبت بدگر و بهین وجه برقاط د و ه و ه و ازوایای مجتمعه
بازاویه ب ترکیب کنید چنانچه هر دو وضع آن باشند و چون بسطد بنا رسید سطح ج ب
منطبق شود بر ب ج چونکه میل هر دو نسبت سطح اب د بهما مقدار م است پس
میوان سطح ع ب ج ج محش ب ج ع را مساوی با محش اب د به رسم نمود و چون
مانندین عمل را در سایر سطوح دمه و دمه ل و غیره بنمایم سطح محش ب ج ع ط
صورت بند در یک از شش محش منظم همه تساوی و بهمین میل م نسبت بمجاور خود حال
فرض میکنیم ع د ط سطحی دیگر باشد مساوی ع و د ط و کوئیم میتوان این دورا
همدگر چنان مستقل نمود که یک سطح محش منظمی ترکیب شود بر هها زاویه سه ع و د مثلا
میواند سطحی شود بدوزاویه سه ع ب و ب ع و و ترکیب شود زاویه مجتمعه مساوی
بازاویه ب و در این اتصال هیچ تغییری در میل و سطح ب ع د و ب ع سه عارض نشود
چونکه بهما مقدار است که باید شاید برای ترکیب زاویه مجتمعه ولی آنوقت که زاویه مجتمعه صورت

بست ضلع ϵ در منطبق شود بر مساوی خود ϵ و بر شرط δ مجموع کرد و زاویه سطحی
 ϵ و ϵ و ϵ و ϵ و از ترکیب آنها صورت بند و زاویه مجسمه مساوی با یکدوم از زوایا
 که سابق ترکیب شده و این اتصال نیز پنج تغییر در حالت زاویه ϵ مذکور و نه در حالت سطح
 ϵ و ϵ و غیره زیرا که چون در سطح ϵ و ϵ و ϵ که سابق بر ϵ مجتمع شده اند میلشان
 بهم همان قدر شایسته است و همچنین در سطح ϵ و ϵ و ϵ و چون بهمین وجه اندک اند
 پس در این ظاهر میشود که در سطح درست بعد یکدیگر متصل شوند و سطحی مسلسل و برشته حاصل شود
 و چنین شکل همان دوازده سطحی منتظم است چونکه مرکب شده از دوازده مخمس منظم مساوی
 و جیسع زوایای مجسمه اش نیز مساوی هستند
 در طرح و ترکیب بست سطحی



فرض میکنیم اب هر یکی از
 سطوح با فرض باشد
 و اقول زاویه مجسمه را
 پنج سطح برکه نام مساوی
 با اب و چنانچه

یک میل باشند نسبت بجا و خود و لهذا بضلع ϵ مساوی با δ و مخمس منظم با ϵ
 را رسم میکنیم و از مرکزش عمود که از اخرج میکنیم بطولیکه با مساوی شود با ϵ و خط
 ϵ و ϵ و ϵ و ϵ و ϵ را وصل میکنیم و زاویه مجسمه ϵ مرکب از پنج سطح ϵ با ϵ و ϵ و غیره
 زاویه بطول و بست زیرا که خطوط با یک ϵ و ϵ و غیره مساوی هستند و ϵ که یکی از اینها
 باشد مساویست با ضلع ϵ پس جمیع مثلثات با ϵ و ϵ و ϵ و غیره مساوی باشند و
 با مثلث مفروض اب و نیز ظاهر است که سطوح با ϵ و ϵ و غیره هم یک میل باشند

هندسه

بجا و خود نیز که زوایای مجمعه و α و β ... چون هر کدام مرکب اند از زوایای مثلث متساوی الاضلاع و ازینک زوایای مجمعه متساوی باشند و فرض میکنیم m میل مایل و n سطحی باشد که در آن دور زوایای متساوی اند و از اینقرار m میل هر کدام از سطوح زوایای مجمعه α باشد نسبت بجا و خود و بعد از این مقدمه چون بر نقاط a و b و c زوایای مجمعه ترکیب کنیم هر کدام مساوی از زوایای m سطح m و n ... صورت بند و مرکب از ده مثلث متساوی الاضلاع که میل m نسبت بجا و خود مقدار m است و زوایای m و n و غیره از اطرش ترتیب مرکب باشد از سه زوایای مثلثات متساوی الاضلاع حال سطحی دیگر توهم میکنیم مساوی با سطح m و n ... این دو سطح را میتوان بهم مربوط ساخت باینکه هر زوایای مثلثات یکیش را متصل نماییم بزوایای مثلثات دیگر و چون سطوح این زوایا سابقا بمیل m ترکیب شده اند یعنی همانقدر که در آن است برای ترتیب زوایای مجمعه α که مساوی باشد با α پس در این ارتباط هیچ تغییر حاصل نشود در حالت اند و سطح یکان یکان و بعد از ارتباط سطح مسطحی حاصل شود مرکب از بیست مثلث متساوی الاضلاع و این یعنی بیست سطحی منظم است چونکه جمیع زوایای مجمعه نیز متساوی هستند

قضیه ۳ مسئله

میخواهیم میل و سطح مجاور از یکی از اجسام کثیر السطح را نسبت بدیگر معلوم کنیم این میل بدو واسطه استنباط شود و از قاعده ترکیبی که در هر کدام از پنج نوع کثیر السطح منظم شرح دادیم بنا بر آنکه راجع به این مسئله بین سه تصویر که هرگاه معلوم باشد سه زوایای سطح که از آنها زوایای مجمعه ترکیب میشود چگونه باید معلوم نمود و زوایای سطحی را که باین دو از سطوح حادث شده و سابق در آخر مقاله پنجم اشاره باین مسئله شد

که هر چنانچه سطحی را با سطح دیگر زوایای مجمعه ترکیب باشد از سه زوایای مثلثات متساوی الاضلاع پس باید از روی مسئله مذکور طلب نمود زوایای را که باین دو سطح از این سطوح حادث شده و آن

زاویه میل دو سطح مجاور چهار سطح است

و در کوشش سطحی $\frac{1}{2}$ زاویه حادثه با این بر دوش سطح میا ورقه است

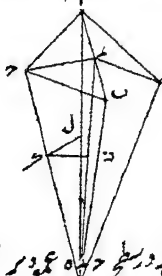
و در هشت سطحی باید زاویه مجمر مرکب سید اندوز را به مثلث مساوی الاضلاع و از
یکت زاویه قائمه و سطحی که دارای دوزاویه مثلث نامید میل مطلوب و سطح مجاور به سطحی است
و در دوازده سطحی سه هر زاویه مجمر مرکب باشد از زاویه مجسم ششم و از آنجا که میل
مابین دو عدد از این سه و یا میل دو سطح مجاور و دوازده سطحی است

و در بدست سطحی مس h زاویه مجرب α که پدیدار شود و زاویه شلخت مساوی لایض α بکار آوریم بخش منظم میل باین اند و سطح که در اراسی و زاویه شلخت α میل در سطح مجاورت سطحی است

قضیه ۴ - مستطک

ضلع کثیر السطوح منظمی معلومت وفتحواهم شعاع کره مخاطیه وعا
کره محیطیه برانجم نامشخص کنیم

اول باید ثابت نمود که پیرسطوح مشغی را میتوان در کره محاط کرد و نیز کره بر آن محیط نمود



مثلت قائم الزاویه دم مساوی شود با مثلث قائم الزاویه ده م و پس عمود دم
مساوی شود با عمود م و لی اب چون عمود است بر سطح دهه سطح اب نیز عمود
بر دهه و برعکس دهه عمود شود بر اب و چون دم در سطح دهه عمود است
بر دهه فصل مشترک باین دو سطح عمود دهه و اب پس عمود شود بر سطح اب و ۲۹
و همین دلیل م عمود شود بر سطح اب پس دو عمود دم و م که از مرکز دو سطح جدا و متقاطع
بر این دو سطح اخراج شده متقاطع شوند بر نقطه مثل م و مساوی کردند حال فرض میکنیم اب و
اب ه دو سطح مجاور دیگر باشند چون عمود کثیر الاضلاع دهه بحالت خود باقی ماند همچنان
دم که نصف دهه است پس مثلث قائم الزاویه دم و ضلعش دم در مجموع
کثیر السطح مساوی هستند پس اگر از مرکز م و شعاع م که رسم کنیم آن کره جمیع سطوح
جمع را بر م اگر نشان قیاس کند (زیر که دو سطح اب و اب ه عمود اند بر طرف شعاع)
و کره محیط شود در کثیر السطح یا کثیر السطح محیط شود بر کره

حال دو خط ۱ و ۲ را وصل کنید پس نظر بمتاوی ۱ و ۲ و مایل
و م ب چون متاوی البعد از موقع عمود متاوی باشند و ای حکم کلی است در سایر خطوط
که از مرکز م بطرفین ضریع وصل شوند پس مجموع پنجخط متاوی شوند و بنا برین اگر مرکز م
و شعاع ۴ کرده رسم کنیم سطح مروکن برابر روشن جمیع زوایای مجسمه کشید الطرح و کره محط
شود بر بخشیم یا آنجم محاط شود و در کره

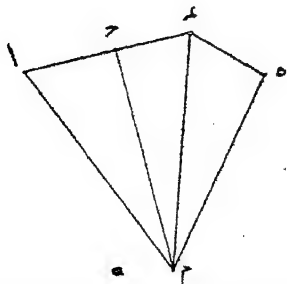
بعد از آنکه منحنی شده سابقه هیچ اشکال ندارد و دستورش از این قرار است
چون منحنی سطحی از جسم کثیر السطح معلوم باشد آن سطح را رسم کنید و عمودش را بر است
آورید و از روی منحنی سابقه طلب کنید میل مابین دو سطح عجی و را بختم را و بعد زاویه در
رامساوی با انمیل رسم کنید و ده رامساوی را جدا کنید و دو خط ح م و ه م را عمود کنید

بر ۶۰ و ۸۰ این دو نقطه متقاطع شوند بر نقطه m پس \angle شعاع $کره$ محیطیه در $کثیر السطوح$ و بعد از استقامت m در $جزء$ a را مساوی شعاع $دایره$ محیطیه بر یکی از سطوح جسم جدا و m را اوضاع کنی پس آن شعاع $کره$ محیطیه بر جسم باشد

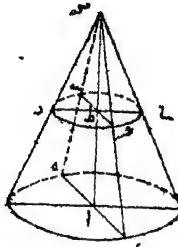
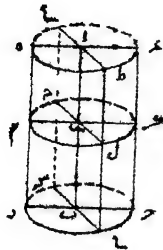
زیرا که دو مثلث قائم الزاویه \angle m و \angle a از این شکل مساوی باشند با دو مثلث قائم الزاویه که همین اسم در شکل سابق است و از این قرار بعد از آنکه \angle a و \angle شعاع دو دایره محیطیه و محیطیه یکی از سطوح جسم باشند m و m دو شعاع $کره$ محیطیه و محیطیه بر همان جسم باشند شرح - بر احکام مذکور چند نتیجه متفرع باشد

اولا - هر کثیر السطوح منتظم را میتوان قیمت نمود با نقد رعد و اهرام منتظمه که آنجمله دارای سطوح باشد و در آن مشترک جمیع آن اهرام مرکز کثیر السطوح باشد و آن بعینه مرکز دو کره محیطیه و محیطیه است ثانیاً - صاحب حجم هر کثیر السطوح منتظم مساویست با حاصل ضرب سطح محیطش در مثلث شعاع $کره$ محیطیه ثالثاً - دو کثیر السطوح منتظم که یک با اسم باشند یعنی هر دو چهار سطحی یا بیست سطحی و غیره دو جسم متشابهند و اضلاع متناظرشان متشابه پس اشعه دو کره محیطیه یا محیطیه متشابه باشند بر نسبت هر دو ضلع متناظر اند و جسم

رابعاً - چون کثیر السطوح منتظمی را در کره محیطیه کنیم و سطوحی از مرکز در طول جمیع اضلاعش گذریم سطح کره را قیمت نمایند با نقد رعد و از کثیر الاضلاع که روی مساوی و متشابه که در جسم مفروض سطوح باشد



مقاله هشتم
در احوال مستدیر جسم مستدیر
یعنی کمره و استوانه و مخروط
تعاریف



۱- استوانه مستدیر جسمی است حادث بدوران
مربع مستطیل $ا ب د ج$ حول ضلع ساکن $ا ب$ و هر جا
استوانه مطلق گوئیم مقصود مستدیر است

در این جهت دو ضلع $ا د$ و $ب ج$ از حالت قیام
نسبت به $ا ب$ خارج نمیشوند و دو سطح مستدیر
 $ا د ج$ و $ب ج د$ را رسم کنند و آنها را دو قاعده
گوئیم و خط $ا د$ سطح بدن استوانه را حادث کند و
خط محدث گوئیم

خط ساکن $ا ب$ را محور و سهم استوانه گوئیم

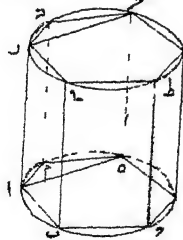
هر مقطع که در استوانه عمود شود بر محور دایره است مساوی با هر کدام از دو قاعده زیرا که در آن
ضمن یک مستطیل $ا ب د ج$ حول $ا ب$ دوران میکند خط $ا د$ عمود بر $ا ب$ سطح مستدیر
رسم کند مساوی قاعده و چنین سطح بعینه مقطعی است که از نقطه $ا$ عمود شود بر محور
هر مقطع مثل $ا د ج$ که در طول محور باشد برقی است مستطیل مضاعف مستطیل

۲- مخروط مستدیر جسمی است حادث بدوران مثلث قائم الزاویه سه $ا ب ج$
حول ضلع ساکن $ا ب$ و هر جا مخروط مطلق گوئیم مقصود مستدیر است

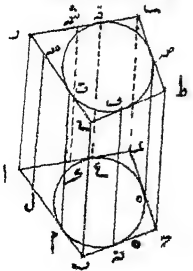
در این جهت ضلع $ا ب$ سطح مستدیر $ب ج د$ را رسم کنند و آن را قاعده مخروط

کوئیم و وتر سرب سطح بزش را حد کنند
نقطه سه را واسه مخروط کوئیم و سه را سه هم و محکم را متقاطعش را
راضلش را منقطع که در مخروط و طعم و باشد بر محور دایره است مثل ۱-۲ و هر قطع که در
جبهه محور باشد مثل سرب در مثل متدای الساقین است مضاعف مثلث محدث
سرب

۳- چون بطی موازی قاعده از مخروط سرب در موضوع نمایم مخروط کوچک سرب
۱- را جسم باقی در ۲ را مخروط ناقص کوئیم
و میتوان توهم کرد که این مخروط ناقص حادث شده باشد به و ران و ذوقه اب ۲
که دو زاویه اش او قائم باشد حول ضلع اط و خطا کن اط محور مخروط ناقص
باشد و دو دایره ب ۲ و ۱ و دو قاعده اش و ب ۱ ضلعش
۴- دو دایره و دو مخروط را متساوی کوئیم برگاه دو محورشان بر نسبت دو قطر قاعده باشد



۵- چون در دایره احد که قاعده استوانه فرض شده
کثیرا اضلاع اب حده را محاط کنیم و بر قاعده این کثیر
الاضلاع منشور قائمی با ارتفاع استوانه طرح نمایم این
منشور را محاطی میگویند کوئیم و میتوانند را
محیط بر منشور



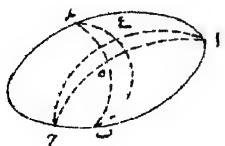
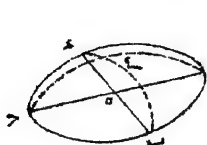
و ظاهراست که خط الراسهای او و ب ۱ و د ۱
منشور چون عمود اند بر سطح قاعده واقع شوند در سطح یک
استوانه پس منشور و این استوانه در طول خط الراس
همسا هم دیگر باشند

ع- بکذا اگر اب حد کثیر الاضلاع باشد محیط بر قاعده استوانه و بر قاعده این کثیر الاضلاع منشور قائمی یا بر قاعده استوانه طرح کنیم منشور را محیط بر استوانه گوئیم منشور را محیط در منشور م و ن نقاط تماس اضلاع اب و ب د و ... اند و از آنها عمود می م ت و ذ ف بر سطح قاعده اخراج شده پس ظاهر است که آنها مشترک باشند در سطح استوانه و منشور محیطی هر دو پس خطوط تماس باشند مابین دو سطح و باز اینجا مکرر می کنیم که سطح محدب است که چون بر هر نقطه اش سطحی مماس کنیم محیط یک سمت آن افتد و از این قرار که سطح محدب است

سطح استوانه نیز محدب است زیرا که چون بر یکی از نقاطش خط می کشی هر دو در یک نقطه طرف این خط خطی بر قاعده مماس کنیم سطح هر دو در آن نقطه بر این خط مماس است و در نتیجه و همین دلیل سطح مخروط محدب است

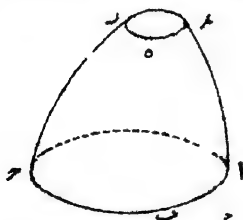
تجسید- از جمله اجسام مستدیره همین استوانه و مخروط و کره در اصول هندسه ذکر شد و سایر متعلق باشند به مخروطات که هندسه تفصیله اش نیز گوئیم

مُقَدِّمَةُ أَجْزَاءِ الْأَصْنَافِ الْمُتَوَصِّلَةِ



اولاً هر سطح مستوی مثل ه اب حد کوچکتر باشد از سطح دیگر مثل ه اب حد که بر او احاطه داشته باشد و اگر این منتهی شده باشد بهمان حد اب حد این ایراد جزو مطالب و اضرایست محتاج به بزرگ شدن ثانیاً- هر سطح محدب مثل ه اب حد کوچکتر باشد از محدبی دیگر که از اطراف بر آن احاطه داشته باشد منتهی شده باشد بهمان حد اب حد

برونها - اگر سطح $ه اب د$ کو چکتر باشد از مجموع سطوحیکه بر آن محیط باشند درینم که درجمله آن سطوح $ع اب د$ سطحی باشد از همه کو چکتر و انتهاش مساوی $ه اب د$ و بر نقطه مثل $ه$ از سطح محدب $ه اب د$ سطحی مستوی میکند رانیم که در یک طرف آن افتد پس این سطح تا می نماید سطح $ع اب د$ را و جزء مقطوعش بزرگتر باشد از سطح مستوی که محدوده $ه$ باشد با طرف آن بنا بر مقدار اولی پس اگر باقی سطح $ع اب د$ را بگیریم و بر آن میفراییم سطح مستوی را بجای نقطه مقطوعه آنوقت سطح جدیدی داریم که از اطراف محیط دارد بر سطح $ه اب د$ و کو چکتر است از $ع اب د$ و ما این سطح را اول کو چکتر از مجموع فرض بودیم پس فرض غلط است و سطح محدب $ه اب د$ کو چکتر است از هر سطحی که بر آن محیط شود و از اطراف منتهی و در همان حد $ه اب د$



شج - بمانند همین دلیل این حکم دیگر ثابت شود

اولاً - اگر سطح محدب $ه اب د$ و بدو منحنی $ه اب د$ و $ه د$

محاط شود در سطحی دیگر که همان دو منحنی منتهی گردند پس

سطح محاط کو چکتر باشد از محیط

ثانیاً - اگر سطح محدب $ه اب$ از مجموع اطراف محاط

ته باشد و در سطح دیگری $د$ خواه نقاط و

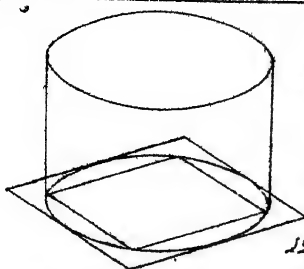
خطوط و سطوح منویه میان آنها مشترک باشد یا

هیچ نقطه مشترک نداشته باشند پس سطح محاط کو چکتر باشد از محیط

قضیه اول

مساحت حجم استوانه مساویست با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاع

برونها - محاط میکنیم محیط بر قاعده استوانه و کو کثیر الاضلاع مثلث متشابه و دوازده



و دو منشور قائم بر این دو قاعده کثیر الاضلاع طرح
میکنیم یا ارتفاع c استوانه

و فرض میکنیم قاعده محیطی باشد و قاعده محیطی
و h جسم محیطی باشد و c جسم محیطی و h ارتفاع منشور

حال ظاهراً است که حجم استوانه مندرج باشد مابین دو حجم منشور و چون قاعده اضلاع
دو قاعده را شما مضاعف کنیم حجم منشور متدرج با استوانه نزدیک شود زیرا که منشور
محیطه وی بتناقص نهد و منشورات محیطه وی نیز آید و با جمله اگر ثابت کنیم که تفاضل
یکی از منشورات محیطه منشور محیطه نظیرش ممکن است که کوچکتر از مقدار مفروض شود
وقت معلوم میشود که حد مشترک این منشورات حجم استوانه است پس کوئیم

$$\text{چون } 2 = c \times h \quad (1)$$

$$\text{و } 2 = c \times h \quad (2)$$

بعد از تشریح تساوی و م از اول

$$2 - c = (c - h) \times c$$

و سابق 2 و 1 ذکر شد که حد $c - h$ صفراست هرگاه عدد اضلاع دو کثیر

الاضلاع شبیه مضاعف شود و حال c مقدارش ثابت است پس تفاضل 2

2 ممکن است که کوچکتر شود از هر مقدار که قابل اشاره می بود

بعد از این مقدار تساوی (۱) که مابین دو مقدار تغییر پذیر c و h مقدار

پی بریم بتساوی حدود آنها پس

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت دایره} \times c$$

نتیجه را - دو استوانه که بر یک ارتفاع باشند نسبتشان مثل سطح دو قاعده است

و دو استوانه که بر یک قاعده باشند نسبت آن مثل دوار ارتفاع است
 نتیجتاً ۲- دو استوانه متساویه بر نسبت دو مکعب دوار شعاع خود باشند یا بر نسبت
 مکعب دو قطر قاعده زیرا که دو قاعده بر نسبت مربع دو قطر خود باشند و چون دو استوانه
 متساویند و قطر قاعده بر نسبت دوار ارتفاع باشند (نقیضاً) پس دو قاعده
 بر نسبت مربع دو ارتفاع باشند پس حاصل ضرب دو قاعده در ارتفاع ثمری و استوانه
 بر نسبت مکعب دوار ارتفاع باشند

تشریح - فرض میکنیم شعاع قاعده استوانه $\frac{1}{2}$ و ارتفاعش $\frac{1}{2}$ مساحت قاعده
 این باشد $\frac{1}{4}$ و مساحت حجم استوانه این $\frac{1}{24}$ یا $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ و

قضیه ششم
 مساحت بدن منشور قائم مساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش در
 ارتفاع منشور

برهان - در شکل تعریف ۵ این سطح مساویست با مجموع مساحت ارباب و ب و ج ط
 و ح ط و غیره که اگر ترکیب نموده اند و ارتفاعات این مستطیلات ارباب و ب و ج ط
 و غیره مساوی هستند با ارتفاع منشور و مجموع قواعدشان ارباب و ب و ج و د و غیره
 محیط قاعده منشور است پس مجموع این مستطیلات یعنی سطح بدن منشور مساویست
 با حاصل ضرب محیط قاعده اش در ارتفاع

نتیجتاً - دو منشور قائم بر یک ارتفاع باشند و سطح بدنشان بر نسبت دو محیط
 دو قاعده شان باشد

قضیه هفتم

سطح بدن استوانه اعظم باشد از سطح هر منشور محاطی اش و اصغر باشد

از سطح همنشور محیطش

اولا فرض میکنیم آب دره یکی از سطوح مشور می طای باشد و ادب دره چنان

باشد راستوانه نظیر آن و گوئیم آب دره \langle ادب دره

بوشا - اول فرض میکنیم آب دره \langle ادب دره و تقاضا بپشتان ف باشد و با

اه استوانه را افقد را مندریم تا نقطه \langle که \langle مساوی شود \langle برابر اه را

و ضمنا مشور استوانه را نیز امتداد میدیم تا پرتاج

ادب ط \langle و سطح اب ط \langle هر که کم \langle برابر

ادب دره و سطح اب دره شوند بر شافنا

\langle ف باست و میتوان \langle را عددی گرفت که

\langle ف اعظم شود و از مجموع دو قطعه دایره ادب و

ل ط پس چون فرض اب ط \langle - ادب ط \langle = \langle ف این مساوی حاصل شود اب ط

- ادب ط \langle \langle ادب \langle ل ط و از اینجا اب ط \langle \langle ادب ط \langle \langle ادب \langle ل ط

یعنی سطح مستوی اب ط \langle اعظم است از سطح محیطش که منتهی شده است بدوره آن و این نتیجه بنا

بر مقدمه اول باطل است

حال فرض میکنیم آب دره = ادب دره و بر نقطه \langle وسط قوس اب خط

محدث \langle در را رسم میکنیم ماد و و ترا \langle و \langle اب آنوقت در مثلث اب \langle این

نامساوی حاصل شود \langle ادب \langle اب پس چون سطح \langle و \langle و \langle و \langle

یکتار شاعند مجموع دو تالی ول اعظم باشد از سیم \langle و بعبارت اخری اعظم

پرتاج ادب دره پس سطح \langle که نصف مجموع دو سطح \langle و \langle و \langle است اعظم

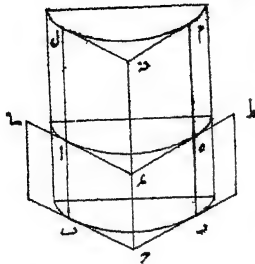
میتواند از پرتاج \langle دره که نصف سطح \langle ادب دره است و این نتیجه بنا بر آنچه در فوق ذکر

مقاله ششم

۲۰۶۲

شد باطل است

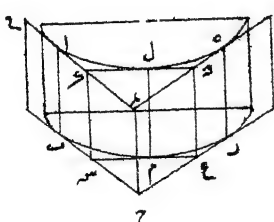
و چون سطح اب ده ممکن شد بر کره تا در قیاس اجاب ده و نه مساوی است
کوچکتر از آن باشد پس سطح منشور محاطی اصغر است و از سطح استوانه



ثانیاً - $ا + د$ و $ط$ دو سطح مجاورند و منشور محیطی
و میگوئیم قیاس استوانه $ا$ و $ب$ اصغر است از مجموع
دو سطح $ا + د$ و $ط$

برها - اگر قیاس $ا$ و $ب$ را بر کره فرض کنیم مجموع
 $ا + د$ و $ط$ و بطریق سابق عددی مناسب است و آن

متساویست و هم نمایم بر این نتیجه که سطح محدب $ب$ و $م$ ل اعظم باشد از سطح محدب
مکبات از دو مستطیل $ل$ و $د$ و $م$ باضافه دو قطعه $ل$ و $م$ و $ب$ و $د$ و اگر



کنیم $ا + د = ط$ و دو قطعه $ل$ و $م$
را هم می کنیم بر وسط دو قوس $ا$ و $ب$ و $ط$
نمایم که خط منکسر $ل$ و $د$ اقصر است از مجموع
 $ا + د$ و اوقت استنباط شود که مجموع مشطی
اسودع و $د$ اصغر است از $ا + د$

یعنی از قیاس $ا$ و $ب$ و چون طرفین را نصف کنیم مجموع دو مستطیل $ا$ و $ب$ کم اصغر
باشد از قیاس استوانه $ا$ و $ب$ و این نتیجه بنا بر آنچه سابق مبین شده باطل است
پس قیاس $ب$ و $د$ کوچکتر باشد از مجموع $ا + د$ پس سطح استوانه اصغر است
از سطح منشور محیطی

قضیه چهارم

مساحت سطح بدن استوانه مساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش
در ارتفاع خود

برهان - هر سطح محاط و محیط میکنیم بقاعده استوانه دو کثیر الاضلاع منتظم مشابه و
مشاور قائم براند و کثیر الاضلاع طرح میکنیم با ارتفاع استوانه

پس سطح بدن استوانه مندرج باشد باین وسط و منشور محاطی و محیطی و بدستور و طبقه
ثابت میشود که چون عدو اضلاع دو قاعده آنها را بی اندازه مضاعف نمایم خدمت شکر
سطوح منشورات محاطه و سطوح منشورات محیطیه سطح استوانه است
بعده از اینقدر فرض میکنیم ۴ ارتفاع استوانه باشد و سطح پهلوی منشور محیطی سه و
قاعده اش ۴ م پس

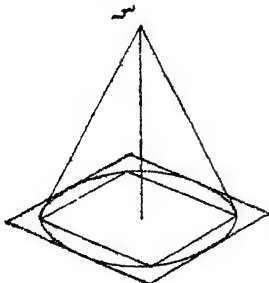
$$\text{سه} = ۴ \times م$$

و چون عدو اضلاع کثیر الاضلاع محیطی را بی اندازه مضاعف نمایم دو مقدار سه و ۴ م \times ۴
تغییر ندهد مقدار اول سطح استوانه باشد و حد ثانی محیط دایره \times ۴ پس

$$\text{سطح بدن استوانه} = \text{محیط دایره} \times ۴$$

قضیه پنجم

مساحت حجم مخروط مساویست با حاصل ضرب قاعده اس در ثلث
ارتفاع آن



برهان - محاط و محیط میکنیم بقاعده مخروط
و کثیر الاضلاع منتظم مشابهی قاعده میگیریم
برای دوهر که رأس شکرشان نقطه سه باشد
پس حجم مخروط واقع باشد باین دوهرم و

مقاله هشتم

۲۶۴

چون عدد اضلاع دو قاعده شان را بی اندازه مضاعف نماییم و نقطه را پس بر جایمان
حد مشترک چهارم می باشد و محیطی که محصور باشد و دلیل اینکه بعینه نیست که در
اول ذکر شد

پس فرض میکنیم ۴ ارتفاع محصور باشد و ۲ حجم یکی از اهرام محیطیه و قاعده
آن آنگاه $2 = 4 \times \frac{1}{3}$ (۱)

و چون بجای دو مقدار تغییر پذیر طرفین حد شان را قرار دهیم چنین شود -

حجم محصور = سطح دایره $\times \frac{1}{3}$
فقط - هر مخروط مثلث است و آن است که بر قاعده و ارتفاع آن باشد و بنا بر این حجم
اولاً - مخروطی که بر یک ارتفاع و بر نسبت قاعده خود باشد
ثانیاً - مخروطی که بر قاعده و بر نسبت ارتفاعات خود باشد
ثالثاً - مخروطات متشابه بر نسبت مکعبات اقطار قاعده خود باشد یا بر نسبت مکعبات
ارتفاعات خود

شرح فرض میکنیم دو شعاع قاعده مخروطی باشد و ۴ ارتفاع آن پس مساحت مجسم

این باشد $2 \times 4 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ و ۲

قضیه ششم

مخروط ناقص اربع که ام و مع دو شعاع دو قاعده اش باشند و مع

ارتفاعش مساحتش این باشد $\frac{1}{3} \pi (4^2 + 2^2 + 4 \times 2)$

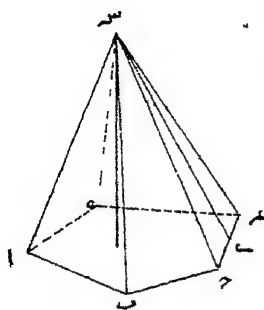
برهان - فرض میکنیم در سطح بر من مثلث القاعده باشد بر ارتفاع محصور سه ۱

و قاعده اش سطح معادل باشد با قاعده محصور و این دو قاعده را در یک سطح فرض

میکنیم نوقت و وراستان سه و ف یک فاصله واقع شوند از سطح دو قاعده و استند

مقاله ششم

محیط قاعده اش در نصف عمود سه
آنجا مقصود عمود است که از رأس سه فرو آید بر یکی از اضلاع قاعده هرم
برها - سطح بدن هرم متعظم مرکب است از مثلثات
متساویه الساقین متساویه الساقین و سه د و سه ب و



سه اب و غیره پس اینچنین حاصل شود

$$\text{سه د} = ۴۰ \times \frac{\text{سه ب}}{۳}$$

$$\text{سه ب} = ۴۰ \times \frac{\text{سه د}}{۳}$$

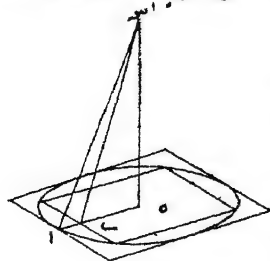
$$\text{سه اب} = ۴۰ \times \frac{\text{سه ب}}{۳}$$

پس چون این تساویات را با هم جمع کنیم مساحت سطح بدن هرم بدست آید از اینقرار

$$(۴۰ + ۴۰ + ۴۰ + ۴۰ + ۴۰) \times \frac{\text{سه ب}}{۳}$$

قصیده ششم

مساحت سطح بدن مخروط متساویست با حاصل ضرب محیط قاعده اش
در نصف ضلع خود مخروط



برها - فرض میکنیم ۱۰ شعاع قاعده مخروط باشد
و سه ا ضلعش و محیط میگیریم محیط مخروط دورتر
متعظم که دو قاعده شان دو کثیر الاضلاع متساویه باشد
و اول این هره زود معلوم شود که سطح مخروط واقع است

با این دو سطح اند و هر متعظم زیرا که چون بقاعده این شکل یکتیه دهم شکلی که درست مساوی
باشد آنوقت سطح مضاعف مخروط احاطه کند از هر طرف مضاعف هرم محیطی را
و محیط شود از هر طرف در مضاعف هرم محیطی سه - سطح اول اعظم باشد از دویم و

از نیم و چون همه را نصف کنیم حکم مذکور نتیجه شود
حال فرض کنیم سه سطح هریم محیطی باشد و سه سطح هریم محیطی م محیط قاعده
اول و محیط قاعده ثانی پس این تساوی حاصل شود

$$(۱) \quad \text{سه} = ۲ \times \frac{\text{سب} \text{ا}}{۲}$$

$$(۲) \quad \text{س} = ۳ \times \frac{\text{سب} \text{ب}}{۳}$$

از روی این دو تساوی ظاهر است که چون عدد اضلاع دو قاعده را بی اندازه مضاعف
نمایم دو سطح سه و س بهم یکدیگر نزدیکتر شوند زیرا که سه روی بقا قص هند و س
روی در ترا میوه نیز برین شود که تفاضل سه - س ممکن است کوچکتر شود و از هر
مقدار که قابل اشاره حسی شود

$$\text{زیرا که} \quad \text{سه} - \text{س} = ۲ \times \text{سه} \text{ا} - ۳ \times \text{سه} \text{ب}$$

و می دانیم که چون عدد اضلاع دو قاعده را بی اندازه تضعیف کنیم اختلاف این ۲
و سه بی اندازه قلیل شود و علاوه بر آن در مثلث سه ا ب این نامساوی حاصل است
سه ا - سه ب > ا - ب و این مقدار حدش صفر است پس تفاضل سه - س ممکن است
کوچکتر شود و از هر مقدار مفروض و چون سطح مخروط همواره واقع است مابین سه و
س پس قدر مشترک آنها است (این مطلب واضح است که هرگاه حد دو تفاضل ب
- ب و ج - ح صفر باشد تفاضل مابین دو حاصل ضرب ب × د - ب × ح
کوچکتر شود و از هر مقدار مفروض)

$$\text{و چون} \quad \text{سه} = ۲ \times \frac{\text{سب} \text{ا}}{۲}$$

بعد از تبدیل طرفین بدو حد خود این تساوی حاصل شود

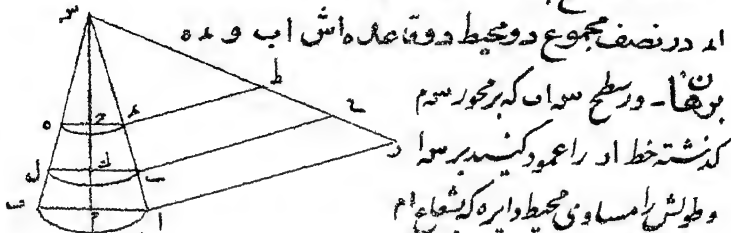
$$\text{سطح مخروط} \times \frac{\text{سب} \text{ا}}{۲}$$

مقاله نخست

۲۶۸

شرح - فرض میکنیم سه ضلع مخروط باشد و شعاع قاعده اش پس محیط این قاعده = πr و مساحت سطح مخروط = $\pi r \times \frac{1}{2} \times$ مد یا πr و مد سه
قضیه نخست

مساحت سطح بدن مخروط ناقص اده ب مساویت با حاصل ضرب ضلعش
ا د در نصف مجموع دو محیط دو قاعده اش ا ب و د ه



برونها - و سطح سواد که بر محور رسم
کشته خط او را عمود کنید بر سواد
و طولش را مساوی محیط دایره که شعاع ا م
باشد قرار دهید و سواد را وصل کنید و مد را بموازات او رسم کنید
حال نظر کنید دو مثلث سواد و سواد این تناسب حاصل شود ا م = د ه
سوا: سواد و نظر کنید دو مثلث سواد و سواد این تناسب او: مد = سوا:

سواد پس او: مد = ا م: م یا = محیط ا م: محیط د ه و بعمل او = محیط ا م
پس مد = محیط د ه بعد از اینکه دو مثلث سواد که مساحت او $\frac{1}{2} \times$ سواد
باشد مساویت با سطح مخروط سواد که مساحت محیط ا م $\times \frac{1}{2} \times$ سواد باشد و بنده
این دلیل مثلث سواد مسویت با سطح مخروط سواد پس سطح مخروط ناقص اده
مساویت با سطح دو ذوقه ا د ط و مساحت ثانی نیست ا د \times (ا ب + د ه)
پس مساحت سطح مخروط ناقص اده ب مساویت با حاصل ضرب ضلعش ا د در نصف
مجموع دو محیط دو قاعده اش

نتیجه - بر نقطه ب وسط ا د خط ب ل ل را بموازات ا ب رسم کنید و ب را بموازات
او پس ب ل مینویساید ثابت شود که ب ل = محیط ل ه و مساحت دو ذوقه ا د ط و نیز =

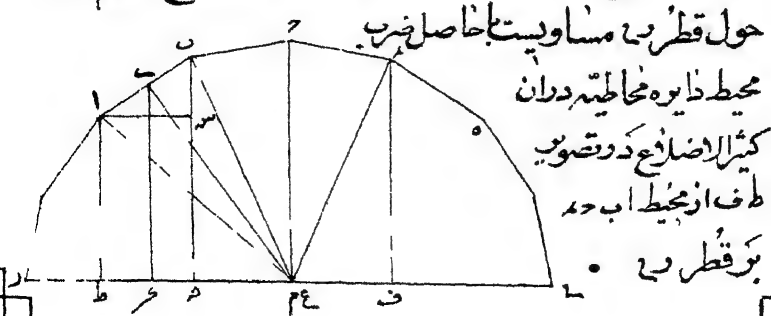
ام \times ام $=$ ام \times محیط - که پس میتوان گرفت که مساحت سطح مخروط ناقص
مساویست با حاصل ضرب ضلعش در محیط مقطعی که بیل فاصله واقع
شده باشد از دو قاعده اش

تشریح - هرگاه خطی مثل ام که متشعب واقع شده است در یک سمت خط م و بآن
در یک سطح است حول خطانی دوران کامل نماید سطحی که با حرکت حادث شود محتسب
این باشد ام \times (محیط ام + محیط م) یا ام \times محیط م - زیرا که خطوط ام و
و - که عمودانی باشند که از طرفین و از وسط خط ام فرو داده اند بر محور م
و چون ام و م را امتداد دهیم تا بر سه متداقی شوند با بر است که سطح حادث
ام همیشه سطح مخروط ناقصی باشد که دو شعاع قاعده اش م و م - باشند چونکه بر
مخروط تمام بر نقطه سه است پس مساحت این سطح همانست که ذکر شد

مساحت مذکور بر هر حالت عقلی گیر و اگر چه نقطه م بر سه واقع شود و آنوقت مخروط
تمام حادث گردد و نیز اگر خط ام بموازات محور باشد و آنوقت استوانه حادث شود
در حالت اول مقدار م - صفر شود و در صورت ثانی م - مساوی میشود با ام یا -

قضیه دهم

مساحت سطحی که حادث شود بدوران قطع کثیر الاضلاع منتظم اب د



مقاله ششم

۲۷۰

بر آنها - چون نقطه - را بر وسط اب فرض کنیم - که را عمود کنیم بر محور این مساوی می شود

مساحت سطح اب = اب \times محیط - که

(مقصود ما از سطح اب و سطح ب د اینجا دو سطحی است که حادث شوند بدوران اب و ب د)

و اسد را بموازات محور رسم کنید آنوقت دو مثلث اب سه و م - که اضلاع برهمه

عمود میشوند و بنابراین مشابه گردند و این تناسب حاصل گردد

اب : اسد یا ط ذ = م - : ک - = محیط م - : محیط - که

و از اینجا اب \times محیط - که = ط ذ \times محیط م -

پس مساحت سطح اب = ط ذ \times محیط م -

و همین دلیل مساحت سطح ب د = ذ ع \times محیط م -

و مساحت سطح ح د = ع ف \times محیط م -

پس بعد از جمع این مساوی حاصل شود

مساحت سطح اب ح د = (ط ذ + ذ ع + ع ف) \times محیط م - = ط ف \times محیط م -

پس نتیجه - هرگاه که اکثر الاضلاع منتظمه تصور کنیم که عدد اضلاعش زوج باشد و محور و

مورکن بر دور اس متقابل و و ح مساحت سطح تمامی که حادث شود بر دایره نصف کثیر

الاضلاع را جمع مساوی شود ب حاصل ضرب محورش و و ح در محیط دایره می طیه و این

محور خود قطر دایره محیطیه است

تعریف

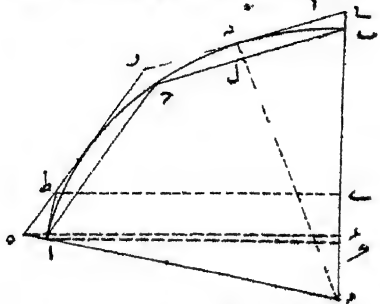
۱ - منطقه کروی قطعه است از سطح کره واقع باین وسط متوازی که دو قاعده اش باشد

و یکی از این دو سطح ممکن است مماس سطح کره باشد و در این صورت منطقه صفا یک قاعده باشد

۲ - ارتفاع منطقه فاصله باین دو سطح قائم است

۳- هرگاه بوهیم نصف دایره ae را حول قطر ae دوران دهیم سطح کروی حادث شود و ضمناً حرکت قوس $رط$ سطح منطقه بوجود آید سواء اینده
قضیه نایزدهم

مساحت سطح منطقه کروی مساویست پنجاه اصل ضرب ارتفاعش در



محیط دایره عظیمه کره

برونها - اول منطقه اختیار میکنیم

صاحب یکا عدد باشد و حادث گشته

باشد از دوران قوس $اب$ حول $بم$

و در این قوس قطعه کثیر الاضلاع منتظم

اج $ب$ را محاط میکنیم و قطعه $ه$ را مشابهنش محیط میکنیم

و اول گوئیم که سطح منطقه $اب$ واقع باشد مابین دو سطح $ه$ و $س$ که حادث میگردند بدوران

دو قطعه $ه$ و $ا$ حول $م$ بران

منطقه $اب$ اعظم است از $س$ چونکه بر آن محیط است و منتهی است بدوره آن و

منطقه اصغر است از سطح $س$ زیرا که چون مماس $اط$ را رسم کنیم دو سطح حادث حرکت

دو قطعه $ه$ و $ا$ و $اط$ مشارک شوند در جزئی که حادث شود و حرکت $ط$ و جزئی که

حادث میشود و حرکت $ط$ اعظم است از سطح حادث حرکت $اط$ چونکه مساحت این

دو سطح $ه$ و $ا$ این دو مقدار است $ا$ $ط$ $(ط + ه)$ و $ا$ $ط$ $(ط + ا)$

و از روی شکل $ه < ا$ و مایل $ط$ $ا$ که عمود است بر $ا$ پس سطح حادث

مور آن $ه$ اعظم شد از سطح حادث بدوران آن $اط$ و سطح نانی اعظم است

(مقدمه دوم) از منطقه $اب$ پس بطریق اولی سطح $س$ اعظم باشد از منطقه $ا$ و

حال کوئیم که چون عدد اضلاع دو قطعه کثیر الاضلاع محیطیه و محیطیه بالی شمار مضاعف کنیم و سطح سه و س متر بجای تقریب جوئید سطح مضبوط این سطح حد مشترک آنها باشد این حکم مبرهن شود باینکه ثابت کنیم که حد تفاضل سه - س صفراست

و چون $\text{سه} = ۲ \pi ۲ - ۲ \times ۲ = ۲ \pi ۲ - ۴$ (۱)

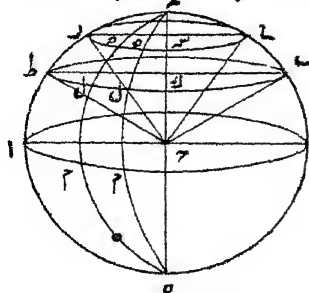
و $\text{س} = ۲ \pi ۲ - ۲ \times ۲ = ۲ \pi ۲ - ۴$ (۲)

پس سه - س = $۲ \pi ۲ - (۲ \times ۲ - ۲ \times ۲) = ۲ \pi ۲ - ۴ + ۴ = ۲ \pi ۲$

و از سابق می بینیم که حد تفاضل این $۲ \pi ۲$ و $۲ \pi ۲$ صفراست و $۲ \pi ۲$ و $۲ \pi ۲$ و $۲ \pi ۲$ تفاضل $۲ \pi ۲$ - $۲ \pi ۲$ - $۲ \pi ۲$ و این مقدار است که هر چند خواهیم کوچک می شود و حد $۲ \pi ۲$ و بطریق اولی حد $۲ \pi ۲$ صفراست پس تفاضل سه - س کو چنانکه از هر مقدار تواند شد و منطقه که همواره مابین سه و س واقع شده حد مشترک آنها باشد بعد از این مقدار چون دو جزء تساوی (۲) را بدو حد خود بدل کنیم این تساوی حاصل شود

مساحت منطقه اب = $۲ \pi ۲ - ۲ \times ۲ = ۲ \pi ۲ - ۴$

مساحت منطقه دو قاعده است که حادث شده باشد بدوران قوس وسط نیز مساوی باشد ضرب محیط اعظمه در ارتفاع آن زیرا که آن تفاضل است مابین دو منطقه دو قاعده که حادث شده باشند بدوران وسط و بدو مساحتش این باشد محیط $۲ \pi ۲$ (دو ک - سه)



یا محیط $۲ \pi ۲$ سه ک سه موجود

نتیجه - در یک کره یا در کرآت

متساوی سطوح مناطق بر نسبت

ارتفاعات آنها منطبق باشند

نتیجه ۲ - سطح کره را میتوان

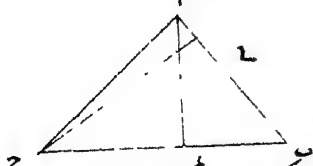
دانست که سطح هر دو قاعده شمس که باشد و ارتفاعش قطر کره و بنا بر این مساحت
مساویت با محیط عظیم ضرب در قطر و چون شعاع کره را $د$ فرض کنیم مساحت سطح
چنین بود سطح کره $= ۲ \pi د$ و $۲ \pi د = ۴ \pi د$

پس معلوم میشود که سطح کره چهار برابر سطح دایره عظیمه است

نتیجه ۳- چون سطح کره را بوجه مذکور یا غرض واحد طول مساحت نمودیم میتوان از خواص
واحد مساحت قاعده و مثلثات و کثیره الاضلاع گروی را مساحت نمود و چون در مقابل
نسبت است آنها را به مثلث قائمه مشخص نمودیم و مساحت این مثلث ثمن سطح کره است

قضیه ۱۱ و آنرا هم

مساحت حجمی که حادث شود بدوران مثلث حول محوری که در سطحش باشد
و بر یکی از رؤس هر دو رنده باشد مساویت با حاصل ضرب سطحی که
کثیر ضلع مقابل بان رأس حادث شده در مثلثان ارتفاع مثلث که قطر
ضلع مذکور باشد



بناها- اول فرض میکنیم مثلث حاب حول یکی
از اضلاع خود دوران کند مثل حاب و حجمی که پدید آید

حرکت حادث شود مساویت با مجموع دو مخروط حادث بجزکت دو مثلث قائم الزاویه
دایه و ادب پس این تساوی حاصل شود

$$\text{حجم حاب} = \frac{1}{3} \pi د^2 \cdot د + \frac{1}{3} \pi د^2 \cdot د = \frac{2}{3} \pi د^3$$

(و مقصود ما از حجم حاب حجمی است که حادث شود بجزکت مثلث حاب حول حاب)
و چون $د$ را غرض کنیم برابر اب این تساوی حاصل شود $د \times اب = حاب \times د$ چون
هر کدام از این دو حاصل ضرب مضاعف مساحت مثلث حاب باشد و بعد از آنکه در یک

مقالہ ششم

(۱) بجای $a \times b$ قرار دسیم $c \times a$ اب را این تاوی حاصل شود
 حجم داب = $\frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi \times 10^2 \times 12 = 1256 \text{ اب}$
 و $\pi \times 10^2 \times 12 = 3768 \text{ اب}$ مساحت سطح بدل مخروطی است که بجزکت اب حادث شود پس



ثانیاً - حال فرض کنیم شدت آب دوران کند حول خط CD که بر یکی از روش گذشته

واب را مقدار دسیم تا مجرای بر نقطه قطع کند و ده را عمود کنیم بر اب

حال حجم داب = حجم داء - حجم دبد

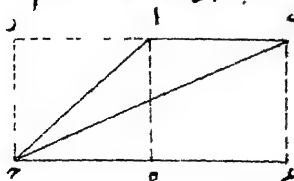
و چون $\text{حجم دایه} = \frac{1}{2} \times \text{مساحت دایه} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 2 = \pi$

$$x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

پس حجم داب = (سطح اء - سطح بء) $\times \frac{1}{3} = 0$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ثالث - دلیل مذکور نمی شد بر آنکه ضلع اب بعد از امتداد محور h را قطع کند و حال آنکه ممکن است این دو خط متوازی باشند پس باین فرض حرکت کنیم



بر محور حء عمود کنیم در آن مرکز دیگر

مراب و آنوقت اینست وی حاصل شود

حجم د اب = حجم د اوه + حجم د ابده - حجم د بده

و چون $\text{حجم دایره} = \frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot h$

حجم اب ۵۰ = ۲۰۰ . ۲۰ . ۲۰

و چون دستاوی اول را با هم دیگر جمع کنیم و سیم را از حاصل تفریق کنیم ابرت و می حاصل شود
 حجم داب = $۱۰۰ \cdot \frac{۱}{۳} (۳۰ + ۵۰ + ۶۰)$
 و چون $۶۰ + ۵۰ = ۱۱۰$ آن دستاوی چنین شود

$$\text{حجم داب} = ۱۰۰ \cdot \frac{۱}{۳} = ۶۰۰ \cdot \frac{۱}{۳} = ۲۰۰$$

$$= \frac{۱}{۳} \text{ در سطح اب}$$

و این نتیجه موافق شد با حکم قضیه

قضیه سیزدهم

خط اب در سطح قطعه کثیر الاضلاع است منتظم و ام قطع ان که
 واقع گشته است در یک سمت قطره پس مساحت حجمی که حادث شود
 بدوران قطاع در حول این قطر مساویست با حاصل ضرب سطحها
 بحرکت محیط اب در مثلث عمود م
 بر آنها - حجم حادث بحرکت قطاع ام در بقدر مجموع حجمهایی است که حادث شوند بحرکت
 مثلثات مساویست با قین مساویه ام ب و ب م و د م

$$\text{و چون} \quad \text{حجم ام ب} = \text{سطح اب} \times \frac{۱}{۳} \text{ م}$$

$$\text{حجم ب م د} = \text{سطح ب د} \times \frac{۱}{۳} \text{ م}$$

$$\text{حجم د م} = \text{سطح د م} \times \frac{۱}{۳} \text{ م}$$

$$\text{حجم ام د} = \frac{۱}{۳} \text{ م} (\text{سطح اب} + \text{سطح ب د} + \text{سطح د م})$$

$$= \frac{۱}{۳} \text{ م} \times \text{سطح اب د}$$

بغیر این

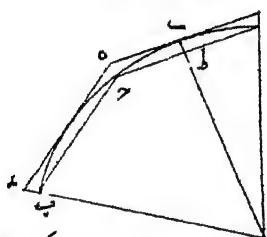
مقاله هشتم

۲۷۶

- ۱- در آن فرض که نصف دایره ماه سال دور آن کند حول قطر ۸۰ و کره وجود
آید حرکت قطاع مستدیر در خط نیز خیمه حادث شود معروف بقطاع کروی
و قطاع کروی منتی است منطقه که از حرکت قوس و ط حادث میشود
- ۲- قطعه کره جزئی است از حجمش که واقع باشد باین دو سطح متوازی و اندو سطح قائم
قطه است و ارتفاع قطعه فاصله باین اندو سطح متوازیست

قضیه چهارم

مساحت قطاع کره مساویست بمحاصل ضرب منطقه اش در ثلث شعاع
برها- ام ب قطاع دایره است که بدو ریش حول ام قطاع کره حادث کند



پس محیط و محیط کنیم بر قوس اب و دو قطعه کثیر
الاضلاع منتظم متشابه ب د ا و د و
ظاهر است حجم قطاع کره واقع باشد باین دو حجم دو
حادث ب حرکت دو قطاع کثیر الاضلاع د و د

و ب د ا و علاوه بر آن اگر عدد اضلاع اند و قطعه کثیر الاضلاع را شمار مضاعف کنیم
حجم مذکور بقطاع کره تقرب جویند و عمل تضعیف ایستوان انقدر برش برده که تفاضل بین
هر که ام از دو حجم د و د و قطاع کره کمتر شود از هر مقدار فرضی زیر آنکه

$$(۱) \quad ۷ = \text{سطح د و د} \times \frac{۱}{۳} م$$

$$(۲) \quad ۷ = \text{سطح ا ح د} \times \frac{۱}{۳} م$$

و بعد از تفریق د - ۷ = $\frac{۱}{۳}$ (سطح د و د - سطح ا ح د) م

و سابق ذکر شده که چون عدد اضلاع مضاعف شود ط همواره میل کند به سمت
واحد فنش با او بینهایت ضعیف شود و نیز ثابت نموده ایم و ط که حد تفاضل سطح

۱۰۰ - سطح (۱) صفاست پس شافل - ۲ - انقدر کوچک شود که بخایم پس قطع
کروی که بهواره واقع است باین ۲ و ۲ حدشکن آید است
حال چون دو جزو تساوی (۱) بدل کنیم بدو حد خود این تساوی حاصل شود

$$\text{حجم قطاع کره} = \text{منطقه اب} \times \frac{1}{3} \pi r^2$$

و اگر قطاع کره حادث میشد بدوران قطاع دایره و حد سطح حول قطره آنوقت

$$\text{حجم قطاع د ح ط} = \text{قطاع د ح ط} - \text{قطاع د ح ر}$$

$$\text{قطاع د ح ط} = \text{منطقه د ح ط} \times \frac{1}{3} \pi r^2$$

$$\text{قطاع د ح ر} = \text{منطقه د ح ر} \times \frac{1}{3} \pi r^2$$

$$\text{قطاع د ح ط} = \frac{1}{3} \pi r^2 (\text{منطقه د ح ط} - \text{منطقه د ح ر})$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \text{منطقه د ح ط}$$

شرح اول - قطاع دایره که محدث قطاع کره است که نصف دایره باشد حجم حادث کره

تمام میشود ولی آنوقت منطقه بدن قطاع کره سطح کره میشود و آنوقت معلوم میشود که ح

حجم کره مساویست ب حاصل ضرب سطح بدن در ثلث شعاع

شرح دیگر - فرض میکنیم شعاع کره باشد و شعاع منطقه کره بدنه قطاع کروی باشد

پس مساحت منطقه این میشود πr^2 و πr^2 پس مساحت قطاع کروی این شود πr^2

$$\pi r^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2$$

و در آن حالت که قطاع مذکور کره تمام باشد $\pi r^2 = \pi r^2$ پس مساحت حجم کره است

$$\pi r^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2$$

و اگر قطر کره را ط فرض کنیم $\frac{1}{3} \pi r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2$ پس حجم کره باین صورت نیز

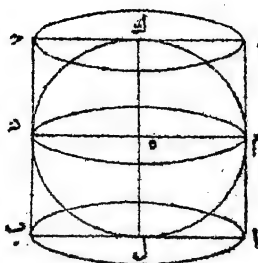
$$\frac{1}{3} \pi r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2$$

مقاله ششم

۲۷۸

قضیه پانزدهم

نسبت سطح کره تمام سطح استوانه محیطیه (با انضمام قاعدتین) مثل ۲ است به ۳ و نسبت حجم آنند جسم نیز مثل ۲ است به ۳



برنگاه - م ل که دایره عظیمه کره است و اب ج د مربع محیطی و چون نصف دایره ل م ک و نصف مربع ل ا د که رایکتره حول قطر ل که دوران و سیم حرکت نصف دایره کره تمام عاود شود و حرکت نصف مربع استوانه محیطیه بر کره موجود آید

ارتفاع ا ب این استوانه مساویت به قطر ل که قاعده استوانه مساویت به کره عظیمه چونکه قطر ش ا ب مساویت به م د پس سطح متحد استوانه مساویت به محیطیه ضرب در قطر ش مساوت سطح کره نیز همین مقدار است و ۱۱ و بنابراین سطح کره نسبت به سطح بدن استوانه محیطیه

ولی سطح کره چهار برابر سطح دایره عظیمه است پس سطح بدن استوانه محیطیه نیز چهار برابر آنرا باشد و چون دو قاعده را که هر کدام دایره عظیمه است بر آن ضافه کنیم تمام سطح استوانه محیطیه شش برابر دایره عظیمه شود پس نسبت سطح کره تمام سطح استوانه محیطیه مثل ۲ باشد به ۳ پس فتره اول حکم مبرهن شد

و اما ثانی چون قاعده استوانه محیطیه مساویت بدایره عظیمه و ارتفاعش قطر کره است پس استوانه مساوی میشود بی اصل ضرب سطح دایره عظیمه در قطر و ۱۰ و مساحت کره مساوت بجاصل ضرب چهار دایره عظیمه در ثلث شعاع و ۱۱ و عبارت اخیری حاصل ضرب سطح دایره عظیمه در ۳ شعاع یا ۱۲ قطر پس نسبت حجم کره حجم استوانه محیطیه مثل ۲ باشد به ۳ و بنابراین

و بعد از وضع تاولی (۲) از تاولی (۱) این تاولی حاصل شود

$$\text{حجم م} = \frac{4}{3} \pi \cdot 0.05 \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

و در مثلث ح ب - این شای حاصل است ح ب - $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

پس حجم ب م = $\frac{2}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \pi$ ، ب م = $\frac{1}{3} \pi$ ، ب م = $\frac{1}{3} \pi$.

شرح - نسبت حجمی که حادث شود و حرکت قطعه بدم به حجم کره که قطرش بدست

مث $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ است به $\frac{1}{2}$ از $\frac{1}{2}$ یعنی مثل هر چه

قضاء بکرم

مساحت قطعہ کرہ واقعہ مابین دو سطح متوازی مساویت بر نصف مجموع

دو قاعده اش ضرب در ارتفاع من باضافه حجم کره که آن ارتفاع قطرش باشد

برها - ف و د و شعاع قاعدین قطع باشند (شکل سابق) و در اینجا

و این قطعه حادث شود و در آن سطح مستدیر بماء در حول مجوزه و پس از

حجم بم = $\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{4}{2} \cdot 20$

ووع حجم بمره = $\frac{1}{\pi} \cdot \pi \cdot (r^2 + r^2 + r^2) \cdot h = 3\pi r^2 h$

پس قطعہ کرہ چون بقدر مجموع اندوچم است ماحتش این باشد

$$(\frac{L}{\pi} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{\pi}{2}$$

ولی چون به راهوارات و در رسم کنیم این ستاوی حاصل شود

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

و بنابر این $\frac{1}{2}b + 5b \times 2 - 2d + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}b$

و چون این مقدار ب م رادرت اوی سابق قطع قرار دسیم و تصرفات لازم را میسیم

حجم قطعه چینی شود $\frac{1}{2} \pi \cdot 10 \cdot (10 + \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10)$

این صورت را تفصیل کنیم بدو جزئی که از آنها این باشد
 $\frac{1}{2} \pi \cdot ۵۰ (۳۶۰ + ۳۶۰)$ یا این دور $(\frac{1}{2} \pi \cdot ۵۰ + \frac{1}{2} \pi \cdot ۵۰)$
 و آن حاصل ضرب نصف مجموع دو قاعده است در ارتفاع قطعه
 و آن جزء دیگر $\frac{1}{2} \pi \cdot ۵۰$ در مساحت جسم کره است که بقطره بیاض مساحت قطعه

از کره مساویت بخوان

نتیجه هرگاه یکی از دو قاعده مفقود باشد قطعه کره مذکور صاحب یک قاعده شود
 پس مساحت هر قطعه از کره که یک قاعده باشد مساویت بر نصف استوائ
 که بر همان قاعده و همان ارتفاع باشد با ضا ذکره که آن ارتفاع قطر آن باشد

هندسه فضائیه احکام مربوطه کن ساختن

- ۱- هرگاه خطی عمود باشد بر سطحی پس هر سطح دیگر که مواز آن باشد عمود می شود بر سطح اول
- ۲- دو خط متوازی چون سطحی را قطع کنند دوزاویه حادثه متساوی باشد
- ۳- هرگاه در زاویه سه سطحی دوزاویه سطحی باشد پس دوزاویه وسطی متقابل به دو ضلع متساوی باشند و عکس این حکم نیز کمالی است
- ۴- در هر زاویه سه سطحی دوزاویه وسطی بزرگتر سطح و ترش نیز اعظم است و بالعکس هرگاه سطح و ترا عظم باشد دوزاویه وسطی مقابل به اش اعظم است
- ۵- در هر زاویه سه سطحی هرگاه سه سطح بر سطح حش عمود گنیم بر وجهیکه مرور کنند بر خط منصف الزوایای اضلاعش پس در طول خطی مستقیم تقاطع شوند
- ۶- در هر زاویه سه سطحی هرگاه سه سطح بر خط الرأسهای مرور گنیم چنانچه عمود شوند بر سطوح مقابل پس در طول خطی مستقیم تقاطع شوند
- ۷- در هر زاویه سه سطحی سطوحی مرور نمایند بر سه خط الرأس بر خطوط منصفه زوایای سطحیه مقابل آنها در طول خطی مستقیم تقاطع کردند
- ۸- چون از رأس زاویه سه سطحی در هر سطح عمودی بر خط الرأس مقابل اخراج کنیم آن عمود در سطحی متسوی واقع گردند
- ۹- در هر جسم چهار سطحی خطوط واصل مابین اواسط خط الرأسها متقابل تقاطع شوند و منصف همه دیگر باشند
- ۱۰- هر دو جسم چهار سطحی که در یک زاویه مجامبه مشترک باشند یا متساوی پس بقیه نیز یکدیگر مثل و حاصل ضرب خط الرأسها فی است که دارای زاویه مشترک باشند

۱۱- هر دو جسم چار سطحی که در یک زاویه وسطی مشارک باشند نسبتشان به یکدیگر مثل دو حاصل

ضرب سطوحی است که دارای آنزاویه باشند

۱۲- سطح منصف یکی از زوایای دو سطحی هر مثلث القاعده قسمت نماید خط الراس ^{بلش} مقابل را برو و قطعه مناسب باد و سطح مجاور

۱۳- هرگاه جسمی چار سطحی دارا باشد یک زاویه محببه سه قائمه پس ربع ضلع مقابل با آنزاویه مساوی باشد با مجموع مربعات سه سطح دیگر

۱۴- مساحت حجم هر یک نسبت طین ناقص مساویت با حاصل ضرب بقاعده اش در عمودیکه از مرکز قاعده علیا فرو آید بر قاعده سفلا ^{بلش}

۱۵- در هر جسم چار سطحی خطوط واصله باین بر راس نقطه تقاطع خطوطیکه در سطح از هر راس مثلث منصف قاعده با خطوط واصله بر نقطه تقاطع شوند این نقطه از مرکز نقل حجم ^{مقا}

ع- عمودیکه از مرکز نقل حجم چار سطحی بر سطح مفروضی فرو آید واسطه باشد باین چهار عمودیکه از گوشن همان جسم بر همان سطح فرو آید (و اگر اتفاقا روشن مذکوره در کیمت آن سطح و ^و نباشند حکم مذکور را باینجه عبارت باید داد نمود)

۱۶- هر سطحی که مرور کنند برو و نقطه وسط هر دو خط الراس مقابل جسمی چار سطحی پس آنجسم را برو و قطعه متعادل قسمت کند

۱۸- جسم کثیرالسطوحیکه روشش واسطه خط الراسهای چار سطحی منتظم باشد نسبت سطحی منتظم است

۱۹- بر چهار نقطه غیر واقع بر سطحی مستوی میتوان کره مرور داد پیش ازیکه کره ممکن باشد

۲۰- در هر جسمی چار سطحی میتوان کره محاط کرد

۲۱- چون سه کره دو دو متقاطع گردند پس سطوح سه دایره فصل مشترک در طول

مقاله ششم

۲۸۴

خطی مستقیم مقاطع کردند و آن خط عمود باشد بر سطح سته مرکز کره
 ۲۲- چون سه خط قائم بر هم دیگر کره را قطع کنند و خود بر یک نقطه مرور نمایند
 مجموع مربعات و تارهای که از آن خطوط در کره میماند مقداری شود ثابت
 در آن مکتب هند که هندستان متخخص فوادی و مسائل حل کردنی
 در مسطحی مکان هندسی چنین تعریف کردند خطی است مَرور کننده بر جمیع نقاطی
 از سطح که همه دارای یکجا صفت مشترک باشد و اکنون در هند سه فضائی نیز گوئیم که
 مکان هندسی سلسله باشد از نقاط فضا که جمیعاً در یک شرط یا دو شرط مشخص نفوذ
 کنند و چنین مکان هندسی هم سطح مطلق تواند شد و هم خط
 مثلاً که مکان هندسی نقاطی است که جمیعاً یکفا صلبه واقع باشند از نقطه مشخصه و عمود
 از مرکز دایره بر سطحش اضلاع شود مکان هندسی نقاطی میباشند که هر یک در شان یکفا صلبه
 باشند از نقاط محیط
 ۱- مشخص کنید مکان نقاطی را که یکف فاصله باشند از دو نقطه معین
 ۲- معلوم کنید مکان نقاطی را که یکف فاصله باشند از سه نقطه مشخصه
 ۳- معلوم کنید مکان نقاطی را که یکفا صلبه باشند از دو سطح مشخص
 ۴- معلوم کنید مکان نقاطی را که یکف فاصله باشند از سه سطح مشخص
 ۵- در فضا مشخص کنید مکان نقاطی را که یکفا صلبه باشند از دو خط واقع بر سطح مسطحی
 ۶- معلوم کنید مکان نقاطی را که یکفا صلبه باشند از سه خط واقع بر سطح مسطحی
 ۷- معلوم کنید مکان نقاطی را که مجموع دو فاصله هر یک در شان از دو خط مسطح
 مساوی شود با طول خط مفروضی
 ۸- معلوم کنید مکان نقاطی را که مجموع دو مربع دو فاصله هر یک در شان از

نقطه مشخصه مساوی شود مربع مفروضی را

۹- معلوم کنید مکان نقاطی را که تقاطع دو مربع و دو فاصله بر یک مسان از دو نقطه مشخصه مساوی شود مربع مفروضی را

۱۰- چون دو خط مستقیم غیر واقع در سطحی را برشته از سطوح متوازی قطع کنیم و دو نقطه فصل مشترک باین برکه نام از آن سطوح و دو خط مفروض را بجای وصل کنیم مطلوب است مکان نقاطی که جیسع آن خطوط واصله را بر نسبت m : n قسمت کنند

۱۱- دو خط غیر واقع در سطحی قائم بر یکدیگر توکمید و خطوطی یک طول متشخص باین آند و مندرج نمایند پس مطلوب است مکان اوساط آن خطوط واصله

۱۲- معلوم کنید مساحت جمعی را که حادث شود بدوران نصف مستطیلی از اضلاعش

۱۳- معلوم کنید مساحت جمعی را که حادث شود بدوران نصف مستطینی که طول اضلاعش باشد و دوران کند حول قطر دایره محیطه اش

۱۴- طول ضلع کثیر السطوح منتظمی معلوم است متشخص نمایند شعاع کره محیطه و شعاع کره ۱۵- کره بشعاع متشخص داریم مطلوب است ضلع کثیر السطوح منتظم محیطه اش

و شعاع کره که محیط شود دوران کثیر السطوح

۱۶- کره بشعاع متشخص داریم مطلوب است مساحت سطح و حجم کثیر السطوح منتظم محیطش

۱۷- مساحت سطح زمین را بحسب فرسنگ و میر یا متر متشخص کنید

۱۸- مساحت حجم هرمی را متشخص کنید بنا بر آنکه واحد حجم کره باشد بشعاع و طول و واحد سطح دایره باشد بشعاع و واحد طول

۱۹- در مثلثی گروی زوایشان تیر به تیر است ۵۸ ۱۴ ۱۶ ۱۲ ۴

مقاله هشتم

۲۸۶

و شعاع کوه ۴ ذرع و مطلوب است مساحت آن مثلث بجب ذرع مربع
 ۲۰- مطلوب است حجم قطعه کوه ذوقاعده که بار تقاع ۴ ذرع باشد و متعلق
 باشد بکوه که شعاعش بچول ۹ ذرع باشد
 ۲۱- دو شعاع قاعدتین مخروط ناقصی ۳ ذرع است و ۵ ذرع و طول
 ضلعش ۷ ذرع مطلوب است مساحت سطح و مساحت حجم آن جسم

تمام شد اول بند
 فی غیر شهرت بیع الباشا
 ۱۰۹۱
 حرر العبد الامم الخاطی
 عبد الرحیم تبریزی
 غفر الله له



اُصُولُ

مَثَلَاتِ مُسْتَقِيمَةِ الْخَطِّ

أَمْرِ قَرِيبِ الْخَلْفَانِ

أَفْهَمَ زَيْدُ بْنُ عَمْرٍو الْقَفَارَ
بِحُجْرَةِ الْمَلِكِ تَبَيَّنَ فِيهِ مَعْنَى كُلِّ

وَمُؤَلَّفِ عُلُومِ رِيَاضِيَةٍ

وَمُؤَلَّفِ

مُبَارَكَةِ زَيْنِيَّةٍ وَابْنِ عَمْرٍو

مُحَمَّدُ بْنُ

١٢٩٢

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على محمد وآله اجمعين
 وبعده مخفی نماند که در مکتب ایران نفون عیدیه ریاضیه غیر از حساب هندسه
 علی چند شیوع داشته و از جمله علوم شریفه مفیده مجهوله که جز چند مسئله پراکنده اش
 در کتب قدیم با چیزی ضبط نشده علم مثلثات است و آن بر دو نوع باشد مستقیمه المخطوط
 و کروی نوع ثانی عمده فایده اش در علم نجوم است و اینجا مقصود بیان نوع اول است
 و آن در ترتیب علوم تحصیلی بعد از حساب اصول هندسه و جبر و مقابله واقع شود و میرزا
 عبد الغفار بن الفاضل الکامل علیهم الصلوات فی در اصول حساب سال ۱۲۸۱ هجری
 اشاره نمود و بکتاب تعلیمیه که تا آن تاریخ در علوم ریاضیه نوشته است برای مدرسه بارکه
 دار فسنون عموماً و برای متعلمین هندسه خود خصوصاً و از جمله بمبین کتاب اصول
 در علم مثلثات مستقیمه المخطوط و آنرا بنده با نهایت تکریم و احترام تقدیم نمود و باب اول در قواعد کلیه
 باب فی قیاس در حل مثلثات باب سیم در علم زاویه گیری
 و خاتمه در بیان بعد بتوسط مثلثات

فهرست اصول مثلثات باب اول

صفحات

۵	مقدمات اصلی
۶	خطوط مثلثاتی
۱۲	روابط مابین خطوط مثلثاتی قوس واحد
۱۵	تعیین مقدار جیب و جیب تمام بحسب ظل
۱۷	استخراج جیب و جیب تمام مجموع و تفاضل دو قوس از روی جیب و جیب تمام اند و قوس
۲۱	استخراج ظل مجموع و ظل تفاضل دو قوس از روی ظل اند و قوس
۲۲	تعیین مقدار جیب و جیب تمام و ظل مضاعف قوس معلوم القدر
۲۲	تعیین مقدار جیب و جیب تمام نصف قوس معلوم القدر از روی جیب تمام آن قوس
۲۴	تعیین ظل نصف قوس معلوم القدر از روی ظل آن قوس
۲۴	تعیین مجموع دو جیب مجموع دو جیب تمام از روی معلوم القدر بهر کار نیم
۲۸	ترتیب جداول مثلثاتی که جداول جیب ظل نیز گویند بطریق اختصار
۳۶	قانون استعمال جداول مثلثاتی

باب دوم

۴۷	حل مثلثات
۴۸	روابط مابین ضلع و زوایای مثلث قائم الزاویه
۵۰	روابط مابین ضلع و زوایای مثلث غیر قائم الزاویه
۵۲	حل مثلثات قائم الزاویا
۵۵	امثله عددی و دستوراتی بقابل اعمال

ضفیف

- حل مُثَلَّثَات غیر قائمه الزوایا ۵۸
 حالت اول که ضلع و دو زاویه معلوم و مطلوب باشد سایر اجزا و مساحت مثلث ۵۸
 حالت دوم که ضلع و زاویه بینها معلوم و مطلوب باشد سایر اجزا و مساحت مثلث ۶۰
 حالت سیم که ضلع و زاویه قابلیه یکی از آن دو ضلع معلوم و مطلوب باشد سایر اجزا و مساحت مثلث ۶۳
 حالت چهارم که هر سه ضلع معلوم و مطلوب باشد سایر اجزا و مساحت مثلث ۶۹
 امشکه عدویه و دستور ترتیب اعمال حساب ۷۲

بَاب سِیم

- علم الزاویه که یعنی بیان فایده علم مُثَلَّثَات در نقشه برداری و حل چند مسئله عملیه
 از دوی قواعد انجم و تعریف بیرق و زنجیره مساحی ۸۲
 تعریف آلت زاویه یاب ۸۳
 زاویه یاب دو برین دار ۸۵
 تعیین فاصله مکان خود از نقطه غیر ممکن الموصول^{۱۶} (تعیین فاصله بین دو نقطه غیر ممکن^{۱۷}) ۸۷
 امتداد دادن خط در وراء مانعی ۸۸
 سه نقطه و سه و سه بر زمین همواری فرض شده و مقصود آنست که بر نقشه ازین نقطه مشخص
 م مشخص کنیم که از اینجا دو فاصله ده و ده و تری و زاویه یک دروند که در روی زمین اندازه گرفته ۸۸
 تعیین ارتفاع عمارتی که وصول بمسقط الحجّرش ممکن باشد ۹۱
 تعیین ارتفاع عمارتیکه وصول بمسقط الحجّرش ممکن نباشد ۹۲
 تعیین ارتفاع جبال ۹۳
 حل بعضی مسائل و امشکه عدویه ۹۴
 مسائل حل کردنی چند از علم مُثَلَّثَات ۱۰۲

خاتمه در تعین ابعاد و یافتن ارتفاعات بقواعد هندسیه از روشی ثلثات صفحه

۱۰۳

مشتابه

بنیکه مطالب این کتاب را خود حقیقه دوم مرتبه بدقت مرسومه ام و اشکال
نیز کشیده ام امید است کمتر سهو و خطائی در آن واقع شده باشد



مستقیم الخطوط

و دیگر چنین ۴۹ ۲۳ ۱۹ وجهانی نظیر عدم اتحاد و یک مقبول نشاد و ذکر شد که چون
 رسم الخط عدد از سایر است همین آنچه را از اعمال و غیره که متعلق باشد بعد از این کتاب نویسم
 از این رسمین (رجوع کنید بآن مبدا) ولیکن در این کتاب چون پیشتر اعمال در حروف مجری
 میشود ما رسم قدیم را اختیار نموده بهر از همین نوشتیم بیارو علامتیکه استعمال میکنند
 است که در حساب ذکر شد ۴ علامت جمع است و ۵ علامت تفریق ۶ علامت ضرب
 ضرب ۷ علامت قسمة علامت بزرگتری علامت استخراج ضلع اول و عموما و غیره
 پنجم و زوایا و قوس چون مجموعشان معادل یک قیاس باشد یعنی ۹۰ و وجه آنها را میگویند
 گوئیم و هرگاه آن مجموع دو قائمه باشد یا ۱۸۰ و وجه آنها را مکمل میگویند

و این دو اصطلاح مکرر استعمال شود باید در نظر داشت

۶ ششم نصف قطر دایره را چون در احد فرض کنیم طول محیط چنین میشود ۲π [این صورت
 حرف یونانی است و آنرا در جمع ممالک علامت نسبت محیط دایره به قطر این نسبت نام
 است که کثیرا استعمال پس علامتی لازم دارد و نزد علمای ما وضع علامت در رسم بوده
 و قانون خاصی در اصول حساب علامت آن نسبت را چنین قرار داد (نمق)
 و آن سه حرف اول کلمات نسبت و محیط و قطر باشد ولی اینجا در اصول هندسه متابعت
 جماعت نموده همان حرف یونانی را علامت قرار داد و آنرا پی تلفظ کنند رجوع
 بنده [و لهذا در علم مثلثات من باب اختصاص محیط دایره را با این علامت ۲π
 بنماییم و نصف محیط را با این علامت π و ربع محیط را با این علامت ۴π و غیره و برین میثم
 قوسی مثل سدر چنین ۴π - سه و مکمل از چنین π - سه و گاه اولی را چنین
 ۹۰ - سه و دومی را چنین ۱۸۰ - سه

هفتم و معروف خطوط مثلثاتی در اعمال مثلثاتی روابط معقیده که ما بین اضلاع

۱ علامت جمع
 ۲ علامت تفریق
 ۳ علامت ضرب
 ۴ علامت قسمة
 ۵ علامت استخراج
 ۶ علامت بزرگتری
 ۷ علامت عموما
 ۸ علامت غیره
 ۹ علامت مکمل
 ۱۰ علامت نسبت

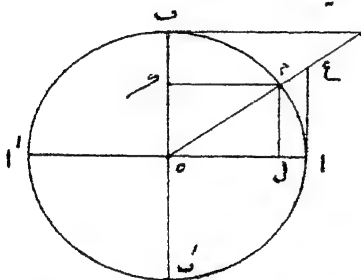
مُشكلات

۷

وقتی نظیر زوایایش بلا واسطه موجود و محقق باشد اعتبار نکنیم بلکه روابط دیگر قرار دهیم
 مابین همان ضلع و بعضی خطوط دیگر که چنان رابطه تمام باقی مذکوره داشته باشند که هرگاه
 آن قتی معلوم باشند خطوط مذکور را بسنج معلوم شوند و هرگاه آن خطوط معلوم باشند قتی
 مذکور را بسنج معلوم شوند و چنین خطوط را خط **مُشکلات** می گویند و اکنون شول شویم که
 هشتمی که در وجیب قوس $ام$ عمود $مل$ است که از یک طرف آن قوس اخراج شود و هرگاه
 بطرف دیگر مرور نموده باشد

۸

خط قوس $ام$ خط $اع$ است که بر یک طرف قوس $ماس$ شود و وقتی که نقطه یک دیگر مور
 و میباش نقطه تماس است و بسنج اعتبار میشود



قطر ظل قوس $ام$ خط $اع$ است که
 از مرکز بطرف ظل وصل شده
 تمام قوس $ام$ تا ۹۰ درجه قوس $بم$ است
 حال چنانکه تمام قوس عبارت است از
 متمم آن قوس چنانچه جیب تمام قوس $ام$ خط

$مل$ است و چون این خط مساویست با $ه$ میتوان گفت که جیب تمام قوس خطی است و اصل
 مابین مرکز و موقع جیب آن قوس جیب تمام $ام = ه$

خط تمام قوس عبارت است از خط متمم آن قوس چنانچه خط تمام قوس $ام$ خط $بذ$ است
 قطر ظل تمام قوس عبارت است از قطر ظل متمم آن قوس چنانچه قطر ظل تمام قوس $ام$
 خط $هذ$ است و هم قوس $ام$ خط $ال$ است که واصل باشد مابین طرف قوس
 و موقع جیب سه گانه تمام قوس عبارت است از متمم آن قوس و این دو خط در حل
 مشکلات استعمالی شوند خطوطی که قوس مثل سه را همان ترتیب که تعریف

باب اول

گردیم من باب اختصار چنین بنمایم جیب مد ظل سه قل سه حم سه طم سه م طم سه (قل علامت قطر ظل است و جهم علامت جیب تمام و طم علامت ظل تمام و قضم علامت قطر ظل تمام)

نهم که گوی مشغول میوم بکر و رابط و منب عددی که بواسطت آنها بعضی خطوط مثلثات
از بعضی دیگر استخراج شوند و نیز در حل مثلثات بکار آهند و نهایت مقصود ما فقره اخیر است
و از آنجا که نتایج و تفکیک و بنا بر این چون و ایامی مثلث محاسبه باشد ما بین صفر درجه و قائمه
مانند ارفوتها نیکه ما بین صفر درجه و ۱۸۰ درجه واقع باشند چیزی منظور نیاریم یعنی که در
قوسهای است تر از صفر درجه و بر تر از ۱۸۰ درجه گفتگو نکنیم

۱۵ و اما من باب اختصار و تمهیل اعمال در همه جا نصف قطر دایره را واحد طول فرض کنیم و علامتش A قرار دهیم و بنا بر این مقادیر عددی خطوط مثلثاتی که استعمال میکنند بمیزان اینک هما خطوط باشند که نصف قطر

یا نهی در استعمال بمقادیر خفیه در علم مثلثات فطر بانک عدد و ستورات قلیل باشد مقدار خفیه را نیز استعمال کنیم و شریطی که در خصوص باید منظور داشت موافق است با آنچه در علم مقابله ذکر کرده ایم نسبت بمقادیر خطوطیکه در وجه حقیقه اعتبار شوند (رجوع کنیه)

۱۰۰۰ جبر و مقابلہ

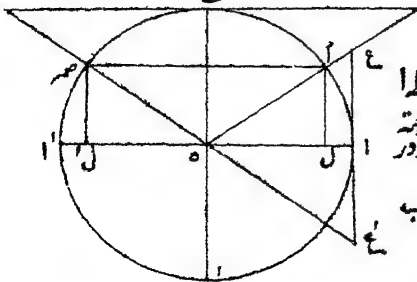
میں دائرہ نصف قطر واحد رسم کنیم و نقطہ

را بدمتک قوسها فرض کنیم و آن قوسها را در

اب اب اعتبار کنی و دو قطر اب و ب

بِ رَاوِصِ كَنِیْمِ قِسْ مَقَادِیْمِ عَدَدِیْمِ

جیو بظلالی اگر فوق قطر باشد مثبت و اینم و آنچه در تحت انقط باشد



این علامت را بر سر آنها قرار دهیم و در اعمال حساب حکم مقادیر منفیه را بر آنها جاری کنیم یعنی مقادیر آنها را منفی دانیم و از این قطر ظل اع از قوس ام مثبت و ظل اع از قوس اب صد منفی است و جیب م ل و جیب ص ل هر دو مثبت باشند جیب تمام و اضلاع تمام را هرگاه در سمت یمن قطرب ب باشند مثبت و اینم هرگاه در یسار باشند منفی و از این قطر جیب تمام ه ل و ظل تمام ب د از قوس ام هر دو مثبت اند و جیب تمام ه ل و ظل تمام ب د از قوس اب صد منفی باشند
قطر ظل و قطر ظل تمام هرگاه بر طرف خود قوس گذارند مثبت اند و هرگاه بر آن طرف مروار منفی باشند مثلاً قطر ظل ه ع از قوس ام مثبت است و قطر ظل ه ع از قوس اب صد منفی است ولی قطر ظل تمامش ه د مثبت است

۱۲ در فاتی پس از این پانته چنین استنباط میشود که اولاً جمیع خطوط مثلاً تی قوسهای کوچک از ربع محیط مثبت اند چنانچه در قوس ام دیده شد و ثانیاً خطوط مثلاً تی قوسهای بزرگ باین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه منفی باشد غیر از جیب و قطر ظل تمام که هر دو مثبت باشند چنانچه در قوس اب ص دیده میشود

۱۳ سبب اینهم در قاعده ترقی و تنزل خطوط مثلاً تی - مقایسه عموم خطوط مثلاً تی را ابتدا کنیم که چون یکی تغییر خطوط مثلاً تی قوسی که از صفر درجه بتدریج متزاید شود تا ۹۰ درجه و بعد از آن ترقی کند تا رسد به ۱۸۰ درجه

مثلاً جمیع قوسها را فقط ایکه یک طرف م از قوس مفروض الاول بسیار نزدیک به نقطه افرض میکنیم و متدرجاً بسمت ب میسریدیم و بعد از ب بسمت ا آنوقت جمیع قوسهای ا که باین ترتیب ترقی میکنند در قوس تصور میکنیم و بعد از ا و سایر خطوط مثلاً تی شان را پس ظاهر میشود که عموم خطوط مثلاً تی از قوس تقصیل ذیل تغییر میکنند

باب اول

۱۰

چون قوس از صفر درجه ترقی کند تا رسد به ۹۰ درجه
جیبش ابتدا از صفر بتدریج تنگتر می شود تا رسد به ۱ (چونکه سابق نصف قطر را افروض نمودیم)
و ظل ابتدا از صفر بتدریج ترقی کند تا چون قوس ۹۰ درجه بسیار بزرگ شود و طول
بسیار بزرگ می شود و از جمیع مقادیر یکدیگر بزرگتر می شود و از آنوقت که قوس بحال قوس
بجدید آید و در حد کوثر ۹۰ درجه = ۹۰ یعنی منهای است بر جوع کیند بعلم جیب
و هکذا قطر ظل ابتدا از آن ترقی کند تا ۹۰ و قطر ظل ۹۰ درجه = ۹۰

و جیب تمام ابتدا از آن شل کند تا رسد به صفر
و ظل تمام آنوقت که قوس بسیار کوچک باشد بتدریج طویل است و هر چند قوس ترقی کند
از طولش می کاهد حاصل آنکه از ۹۰ میرسد به صفر
قطر ظل تمام نیز از ۹۰ شل می کند تا رسد به ۱
و بازاء دو حد صفر درجه و ۹۰ درجه نتایج ذیل است بمطابق می شود

جیب ۰ = ۰	ظل ۰ = ۰	ظل ۰ = ۰
حم ۰ = ۱	ظم ۰ = ۹۰	ظم ۰ = ۹۰
جیب ۹۰ = ۱	ظل ۹۰ = ۰	ظل ۹۰ = ۰
حم ۹۰ = ۰	ظم ۹۰ = ۰	ظم ۹۰ = ۰

چون قوس از ۹۰ درجه ترقی کند و رسد به ۱۸۰ درجه
جیب مثبتش ابتدا از آن شل می کند تا به صفر و جیب ۱۸۰ = ۰ و ظل منفی می شود
و ابتدا بسیار طویل است و بتدریج مقدار مطلقش متناقص می شود حاصل آنکه از ۹۰ میرسد
قطر ظل منفی می شود و ابتدا بسیار طویل است و هر چند قوس ترقی کند مقدار مطلقش متناقص
می شود و خلاصه از ۹۰ میرسد به ۱ - و قطر ظل ۱۸۰ = ۱ -

مثلثات

۱۱

جیب تمام منفی می‌شود و مقدارش از صفر می‌رسد به -۱.
 ظل تمام منفی می‌شود و بتدریج ترقی میکند و از صفر می‌رسد به ∞ .
 قطر ظل تمام مثبت است و به همین حالت ترقی نمودن و جمع مقادیر یکجا و از یکدیگر حاصل
 آنکه از ا می‌رسد به ∞ پس خلاصه تفصیل مذکور این می‌شود

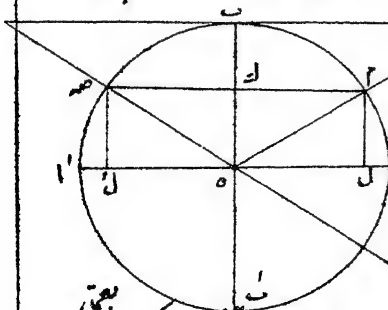
$$\text{جیب } ۱۸^\circ = ۰ \quad \text{ظل } ۱۸^\circ = ۰ \quad \text{قل } ۱۸^\circ = -۱$$

$$\text{حم } ۱۸^\circ = -۱ \quad \text{طم } ۱۸^\circ = -\infty \quad \text{قطم } ۱۸^\circ = \infty$$

چنانچه در احوال قوسهای مکمل - مقصود ما اینجا مقایسه خطوط مثلثاتی هر دو قوس مکمل است
 پس هر دو آسان تر است که به آسانا مشترک فرض کنیم بر نقطه م خط م را به موازات قطر
 رسم میکنیم آنوقت قوس سمت بسیار ا صه مساوی می‌شود با ام و بنابراین اب صه =

$$\pi - ۱ \text{ صه} = \pi - ۱ \text{ م یعنی اب صه مکمل است با ام}$$

حال قوس ام را سه فرض میکنیم و اب صه مساوی می‌شود با آ - سه پس خطوط



مثلثاتی این دو قوس را به هم دیگر می‌بخشیم
 و وجب آنها یعنی م ل و صه ل چنانچه
 ظاهر است مساوی باشند و صه ب ک ع
 و وجب تمام آنها یعنی ه ل و ه ل بحکم
 مساوی هستند ولی بحکم علامت منفی

و وظل آنها یعنی ع و ا نیز مساوی هستند و بحکم علامت مخالف و بکذا در ما
 حاصل آنکه آن روابط چنین نوشته شود

$$\text{جیب } (\pi - \text{سه}) = \text{صه سه} \quad | \quad \text{حم } (\pi - \text{سه}) = - \text{حم سه}$$

$$\text{ظل } (\pi - \text{سه}) = - \text{ظل سه} \quad | \quad \text{طم } (\pi - \text{سه}) = - \text{طم سه}$$

مل (۳ - سه) = - مل سه | فطم (۳ - سه) = فطم سه
پس معلوم شد که خطوط مثلثاتی هر دو قوس مکمل از حیث مقدار
متحد اند و از حیث علامت مختلف غیر از جیب قطر ظل تمام که هم از
مقدار متحد اند و هم از حیث علامت

۱۵ پانزدهم در نسبت روابط میان خطوط مثلثاتی قوس واحد - خطوط مثلثاتی یک
قوس را میتوان بواسطه بعضی دستورهای مختصر آسانی از یکدیگر استخراج نمود و حال
مابست آوردن آن دستور است

قوس ام را بنظر آورده مقدارش را سه فرض میکنیم و خطوط مثلثاتی را هم همین
مقدار

$$م = جیب سه \quad ه = حتم سه \quad ا = ظل سه$$

$$ه = ظل سه \quad ب = حتم سه \quad د = فطم سه$$

طول نصف قطر واحد فرض شده و در مثلث ه م ل این تساوی نتیجه میشود $م^2 + ل^2 = ه^2$

$$ه^2 = م^2 + جیب سه^2 + حتم سه^2 = (۱)$$

و مثلث ه م ل و ه ا و الزوايا باشند و بنا بر این $\frac{ا}{ه} = \frac{۱۴}{۱۰}$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ظل سه}}{\text{حتم سه}} = \frac{۱}{\text{حتم سه}} \quad \text{و بنا بر این}$$

$$(۲) \quad \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = \frac{\text{حتم سه}}{\text{حتم سه}}$$

و بتساوی همان دو مثلث نیز این تساوی حاصل شود $\frac{۱}{ه} = \frac{۴}{م}$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = \frac{۱}{\text{حتم سه}} \quad (۳)$$

و برای یقین دستور ظل تمام و قطر ظل تمام را جمع میکنیم و مثلث مشابه ه د ذوه را
و بتساوی ضلوع آنها این تساوی نتیجه میشود

$$\frac{ب}{ب} = \frac{د}{د} \quad \text{و} \quad \frac{د}{م} = \frac{ب}{ه}$$

تقسیم
عدد (۱) و (۲) و (۳)
در ضلع ه م ل
و در ضلع د م ل
و در ضلع د ه ل
و در ضلع د م ل
و در ضلع د ه ل
و در ضلع د م ل

مُثَلَّثَات

۱۳

یعنی ظم سه = $\frac{\text{حم سه}}{\text{حس سه}}$ (۴)

فطم سه = $\frac{\text{حس سه}}{\text{حس سه}}$ (۵)

چونکه م ک = ه ل = حم سه و ه ک = م ل = جیب سه
پس هرگاه یکی از خطوط مثلاً قی قوسی بر ما معلوم باشد میتوان از قوسی دستورهای مذکور
سائر خطوط را استخراج نمود

۱۴ شایسته آنست که دستورهاى غیر یاقین را در قوس ام ثابت نمودیم و اگر چه این
قوسان ۹۰ درجه و کوچکتر است و دستورهاى عمومیت دارند و بعلت اینست
بجمع قوسها بشک ما بین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه واقع باشند مثل قوس
اب سه و این مطلب از قرآن تفصیل ذیل باسانی ملحوظ میشود

جیب اب سه = ص ل و حم اب سه = ه ل و ظل اب سه = ا - ا ع
و غیره و اکنون باید قواعد حساب تقادیر منصفیه را چنانچه در جبر و مقادیر
مقرر شده اینجا معمول داشت

در مثلث ه ص ل این تساوی منتجه می شود $\frac{\text{ص ل}}{\text{ه ل}} + \frac{\text{ه ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ص ل}}$

و چون $(\text{ه ل})^2 = \text{ا} \times \text{ص ل}$ مساویست با $\frac{\text{ا}}{\text{ه ل}} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ا}}$ از تساوی مذکور این تساوی منتجه میشود

$\frac{\text{ص ل}}{\text{ا}} + (\text{ه ل})^2 = \text{ا}$ یا $\text{حس اب سه} + \text{حم اب سه} = \text{ا}$

پس معلوم شد که دستور (۱) بقوس اب سه نیز بعلق میگیرد

بنسبه دو مثلث ه ص ل و ه ا ع این تساوی منتجه میشود $\frac{\text{ص ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ه ل}}$

ولی اگر دو مقدار مطلق با هم مساوی باشند با علامت منفی نیز مساوی میشوند

پس $\frac{\text{ا}}{\text{ه ل}} - \frac{\text{ص ل}}{\text{ا}} = ۰$ (۷)

و چون $\frac{\text{ا}}{\text{ه ل}} = \frac{\text{ا}}{\text{ه ل}}$ و $\frac{\text{ص ل}}{\text{ا}} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ا}}$

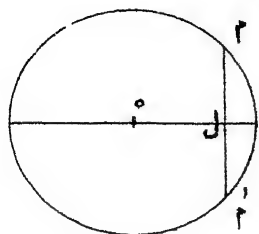
باب اول

۱۴

از تساوی (۱) این تساوی نتیجه میشود $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ}$

یا $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

پس معلوم شد که دستور (۲) نیز بقوس ا ب ه تعلق میگیرد و بکنار سایر دستورها
 ۱۷ گفتیم مثال منجوماً هم در اینجا هم بی وسایط قواعد دیگر فواید دستوری مذکور را در
 ضمن چند مثال ظاهر نماییم بنابراین که حکم ذیل را بعنوان علوم متعارفه مستم داریم
 جبیب هر قوس نصف تر مضاعف القوس است



مثال $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ}$

بعلاز این حکم منجوماً هم خطوط مثلثاتی قوس ۳۰

درجه و استخراج کنیم قوس ۶۰ درجه

محیط است و وترش ضلع مستقیم مساوی با

نصف قطر باین صورت وتر ۱ = پس جبیب ۳۰ = $\frac{1}{2}$

چون جبیب قوس ۳۰ معلوم شد سایر خطوط مثلثاتی نیز از روی دستوری بنا

استخراج میکنیم از دستور (۱) این تساوی نتیجه میشود $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ}$

یا $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$ و بنابراین $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

از دستور (۲) چنین نتیجه میشود $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

از دستور (۳) $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

از دستور (۴) $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

با جمله از دستور (۵) $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$

خال منجوماً هم خطوط مثلثاتی قوس ۴۵ و نیز استخراج کنیم وتره ۹۰ درجه

ضلع مربع محاطی است و مساویست با ۲۷ و چون وتره ۹۰ درجه مساوی شد با ۲۷

$$\text{جیب } ۴۵^\circ = \frac{۲۷}{۲}$$

تمام قوس ۴۵ درجه تا ۹۰ خود ۴۵ ات

$$\text{پس } \text{حم } ۴۵^\circ = \text{جیب } ۴۵^\circ = \frac{۲۷}{۲} \text{ و } \text{طل } ۴۵^\circ = \text{حم } ۴۵^\circ = \frac{۲۷}{۲}$$

$$\text{و } \text{طل } ۴۵^\circ = \text{حم } ۴۵^\circ = ۱ : \frac{۲۷}{۲} = \frac{۲۷}{۲}$$

و چون از روی دستورهای هندسی اندلاع بعضی اشکال مثلث را استخراج کنیم بطریق مذکور خطوط مثلثاتی چند قوس دیگر را مشخص نمود

۱۸ همچنان دستورهای (۱) و (۲) تا (۵) را مخصوصاً در مقامی استعمال کنیم که

یا جیب تمام قوس معلوم باشد و بخواهیم سایر خطوط مثلثاتی آن قوس را استخراج کنیم و یا از همین دستور میتوان چند دستور دیگر استنباط نمود که کار آیند در مقامی که

عوض جیب یا جیب م خط مثلثاتی دیگر معلوم باشد

مثلاً بخواهیم مقدار جیب و جیب تمام و الجیب ظل بدانیم

رجوع کنیم بدستور (۱) و (۲) که اینها باشند

$$\text{جیب } ۲^\circ \text{ سه} + \text{حم } ۲^\circ \text{ سه} = ۱ \text{ و } \text{طل } ۲^\circ \text{ سه} = \frac{\text{جیب } ۲^\circ \text{ سه}}{\text{حم } ۲^\circ \text{ سه}}$$

و طریقی دستور ویم را مجزاً در یک نیم این مساوات نتیجه میشود $\text{طل } ۲^\circ \text{ سه} = \frac{\text{جیب } ۲^\circ \text{ سه}}{\text{حم } ۲^\circ \text{ سه}}$

بعد از رفع مخرج بر این مساوات در دستور (۱) قرار دهیم اینچنین مساوات بترتیب

$$\text{مثلاً میشود } \text{طل } ۲^\circ \text{ سه} + \text{حم } ۲^\circ \text{ سه} = ۱$$

$$\text{حم } ۲^\circ \text{ سه} = (۱ + \text{طل } ۲^\circ \text{ سه})$$

$$\text{حم } ۲^\circ \text{ سه} = \frac{۱}{۱ + \text{طل } ۲^\circ \text{ سه}}$$

$$\text{و بالجمله } \text{حم } ۲^\circ \text{ سه} = \pm \frac{۱}{۱ + \text{طل } ۲^\circ \text{ سه}} \quad (۶)$$

و چون مقدار حم ۲ سه بدست آمد این مساوات را قرار میدهیم

ساوت پرت میباشد
طل ۲ سه حم ۲ سه = حم ۲ سه
و چون اول جیب سه را از ص

باب اول

۱۶

$$\text{حب}^2 \text{ سه} = \frac{\text{ظل}^2 \text{ سه} \text{ هم}^2 \text{ سه}}{\text{ظل}^2 \text{ سه} + 1} = \frac{\text{ظل}^2 \text{ سه}}{1 + \text{ظل}^2 \text{ سه}}$$

و بنا بر این حب سه = $\pm \frac{\text{ظل}^2 \text{ سه}}{1 + \text{ظل}^2 \text{ سه}}$ (۲)

و چون معادل حب سه و هم سه را از دستور (۶) و (۷) برگیریم و قدر و قدر
(۳) و (۴) و (۵) قرار دهیم دستورهای دیگر اسباط میشود که بواسطه آنها و از

ظل سه مقادیر فل سه و ظم سه و قطم سه را میتوان معلوم کرد

و همچنین بطریق مذکور میتوان از روی دستورهای (۱) و (۲) تا (۵) مقادیر جمیع
خطوط مثلثاتی را بحسب قطب ظل و ظل تمام و قطر ظل تمام استخراج نمود ولی اگر اسباط
این چند دستور را در عمده متعلمین گذاریم و لی است

فوتنیز در هر قوس میان ظل و ظل تمام این رابطه مفیده موجود و محقق است ۱۹

$$\text{ظل سه} \times \text{ظم سه} = 1 \quad (۱)$$

برها - چون دو دستور (۲) و (۴) را جزو جزو در برهم دیگر ضرب کنیم چنین میشود

$$\text{ظل سه} \times \text{ظم سه} = \frac{\text{حب سه} \text{ هم سه}}{\text{هم سه} \text{ حب سه}} = 1 \quad \text{فما لمطلوب}$$

بفصحه بینک - در علم جبر و مقابله مبرهن شده که چون مقادیر ضمیمه را در اعمال حساب است ۲۰

کنیم هر مقدار صاحب دو نوع جذر میشود مثل 1 ± 4

$$\text{و ماینز در فوق چنین نوشتیم هم سه} = \pm \frac{1}{1 + \text{ظل سه}^2}$$

هر دو علامت را قرار دادیم تا آنکه دستور در جمیع حالات بکار آید پس اگر قوس کوکبه

از ۹۰ درجه باشد جیب تماثل مثبت است و علامت + را اختیار میکنیم تا به

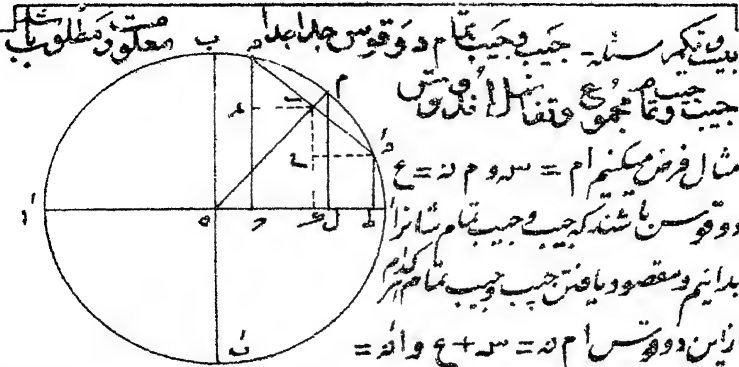
$$\text{هم سه} = \frac{1}{1 + \text{ظل سه}^2} \quad \text{و اگر قوس مابین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه باشد}$$

$$\text{جیب تماثل منفی است و هم سه} = - \frac{1}{1 + \text{ظل سه}^2}$$

و قانون اختیار علامت در هر دستور مضاعف چنین بود که ذکرش

مُثَلَّثَات

۱۷



بیست و نهم شد جیب و جیب تمام دو قوس جدا جدا ب معلوم و مطلوب است
 جیب و تمام مجموع و تفاضل این دو قوس
 مثال فرض میکنیم $ام = سد و نه = ع$
 دو قوس باشند که جیب و جیب تمام شان را
 بداییم و مقصود یافتن جیب و جیب تمام کلیم
 از این دو قوس $ام = نه = سد + ع$ و $انه =$
 $سد - ع$ باشد و چون $م ل = جیب سد و نه$ $= حم سد و نه = حب ع و نه = حم ع$
 حب $(سد + ع) = ۷۵ = ۷۴ + ۱ = ۷۴ + ک = ۷۴ + د$
 حم $(سد + ع) = ۷۵ = ۷۴ - ک = ۷۴ - د$
 حب $(سد - ع) = ۷۴ = ۷۴ - ک = ۷۴ - د$
 حم $(سد - ع) = ۷۴ = ۷۴ + ک = ۷۴ + د$
 پس بمنقدر کافیت که مقادیر ک و د و د و د را استخراج میکنیم تا بزرگ
 آنها مقدار جیب $(سد + ع)$ و حم $(سد + ع)$ و غیره مشخص شود
 پس بتبار و مثلث متساوی الساقین $ه ل و م ل$ این تناسب نتیجه شود
 $\frac{ه ل}{م ل} = \frac{ه ک}{م ک} = \frac{حم ع}{حب ع}$ و بنا بر این $ه ک = حب سد و حم ع$
 و دیگر $\frac{ه ل}{م ل} = \frac{ه د}{م د} = \frac{حم ع}{حب ع}$ و بنا بر این $ه د = حب سد و حم ع$
 و روش دیگر $د م و م ل$ چون ضلعشان بر هم دیگر عمودند متشابه باشند و این تناسب
 $\frac{د م}{م ل} = \frac{د ه}{م ه} = \frac{حب ع}{حم ع}$ و بنا بر این $د ه = حب سد و حب ع$
 و دیگر $\frac{د م}{م ل} = \frac{د ک}{م ک} = \frac{حب ع}{حم ع}$ و بنا بر این $د ک = حب سد و حب ع$
 و چون مساوی این خطوط $ه ک و د ه و د م$ را در تساوی می سابق بجای مقادیر

جیب (س+ع) و حم (س+ع) و غیره قرار دهیم چار دستور اصلی ذیل استنباط

$$\text{جیب (س+ع)} = \text{جیب س} + \text{حم ع} + \text{حم س} \quad (۹)$$

$$\text{حم (س+ع)} = \text{حم س} + \text{حم ع} - \text{حب س} \quad (۱۰)$$

$$\text{حب (س+ع)} = \text{حب س} + \text{حم ع} - \text{حم س} \quad (۱۱)$$

$$\text{حم (س-ع)} = \text{حم س} - \text{حم ع} + \text{حب س} \quad (۱۲)$$

۲۲ بیست و نهمی مذکور عمودیت دارند و در هر صورت بدو قوس س و ع تعلق نگیرد

اعلم از آنکه کوچک باشند بزرگ و چون شکل سابق را برای آن حالت خاصی رسم نمودیم که

از دو قوس س و ع و مجموعشان س+ع کوچکتر باشد از ۹۰ درجه بر ملا درست

سازیم که هر چند آن دو قوس بزرگ باشند دستورهای مذکور شامل حال آنهاست

ولی نظر براینکه از حدی که خود قرار داده ایم خارج نشویم نباید ذکر کنیم جز آن حالات را که هر کدام

از دو قوس س و ع و نیز مجموعشان س+ع کوچکتر باشد از ۱۸۰ درجه

حالت اول آنست که هر کدام از دو قوس س و ع و مجموعشان کوچکتر باشد از ۹۰ درجه

باینصورت س > ۹۰ و ع > ۹۰ و س+ع > ۹۰ این حالت اصلی است که پیشین خواهیم

حالت دوم آنست که س > ۹۰ و ع < ۹۰ ولی س+ع > ۹۰

س تمام س و ع را تا ۹۰ درجه اختیار میکنیم و فرض میکنیم

س = ۹۰ - س و ع = ۹۰ - ع و آنوقت س+ع = ۱۸۰ - (س+ع)

پس س و ع و مجموع س+ع هر کدام کوچکتر اند از ۹۰ و بنابراین دو دستور

(۹) و (۱۰) بآنها تعلق میگیرد از اینقرار

(۹) جیب (س+ع) = جیب س + حم ع + حم س

(۱۰) حم (س+ع) = حم س + حم ع - حب س

(۱۱) حب (س+ع) = حب س + حم ع - حم س

(۱۲) حم (س-ع) = حم س - حم ع + حب س

حرف (س) در مقابل
نام دوتای که در این کتاب
جاء از آنرا داده شد

باب اول

۲۹

و این بعینه دستور (۱۰) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته و بعد

$$\text{حب (سه-ع)} = \text{حب (۱۱۰-سه-ع)} = \text{حب (سه+ع)}$$

$$= \text{حب سه حم ع} + \text{حم سه حب ع}$$

و چون حب سه را بجای حب سه قرار دسیم و - حم سه را بجای حم سه

$$\text{این تا وی فتحه شود حب (سه-ع)} = \text{حب سه حم ع} - \text{حم سه حب ع}$$

و این بعینه دستور (۱۱) است که بدو قوس سه و ع تعلق گرفته و همین نحو عمویت

دستور (۱۲) را ثابت میکنیم

حالت چهارم در مقام استعمال دستور (۱۱) و (۱۲) ممکن است اتفاق

$$\text{افتد که سه} < ۹۰ \text{ و ع} < ۹۰$$

پس کمال دو قوس سه و ع را میگیریم و آن سه است و هر کدام کوچکتر انداز

۹۰ درجه و اگر سه بزرگتر باشد از ع پس کوچکتر شود از ع و در مضورت دو دستور

(۱۱) و (۱۲) باین دو قوس سه و ع تعلق میگیرند

$$\text{حب (سه-ع)} = \text{حب [۱۱۰-سه- (۱۱۰-ع)]} = \text{حب (ع-سه)}$$

$$= \text{حب ع حم سه} - \text{حم ع حب سه}$$

و چون حب سه = حب سه و حم سه = - حم سه و حب ع = حب ع

و غیره پس حب (سه-ع) = حب سه حم ع - حب ع حم سه

$$\text{و بگذارد حم (سه-ع)} = \text{حم [۱۱۰-سه- (۱۱۰-ع)]} =$$

$$= \text{حم (ع-سه)} = \text{حم سه حم ع} + \text{حب سه حب ع}$$

یا آنکه حم (سه-ع) = حم سه حم ع + حب سه حب ع

پس معلوم شد که دو دستور (۱۱) و (۱۲) در این حالت نیز بدو قوس سه و ع تعلق

یکدیگر و با جمیع حالاتی را که ممکن است باین جد و شش مفروضه عارض شود ذکر نمودیم
بنابر آنکه سه و ع و سه و ع هر کدام کو حکم از ۱۸ درجه باشند چهار حالت
عارض نمی شود و ما بعد از ذکر نمودیم و بنابر این میزان گشت که هر چهار دستور با جمیع
نوسه ها یک درجه و دویست و ندرج باشند تعلق یکدیگر و بلکه باسانی ثابت می شود که
آنها اعم اند از آنحد و دیگر ما قرار دادیم و دو قوس سه و ع هر چند بزرگ باشند با
تعلق یکدیگر و ما این مطلب را در ضمیمه کتاب خیال داریم ذکر کنیم

و حکم عمومیت مختص باین چهار دستور است بلکه هر دستور که بعمل حساب از آنها اشتغال
شود کلیت مثال جیب بیستم قوس ۱۲ درجه و ۴۵ معلومت و مطلوب باشد چنین

حب (۳۰ + ۴۵) و حب (۳۰ + ۴۵) و حب (۴۵ + ۳۰) و حب (۴۵ - ۳۰) و حب (۳۰ - ۴۵)

مقادیر جیب و جیب تمام اند و قوس را در ۱۲ ثابت نموده ایم و بعد از آنکه حب ۲
جیب تمام ۱۵ و جیب ۱۵ و حب ۱۵ درجه را معلوم خواهیم می توانیم باین پنج آنهارا امتحان نمائیم
جیب ۲۵ درجه باید مساوی باشد بجمع بیستم ۱۵ درجه و جیب تمام ۷۵ درجه مساوی با

۱۵ درجه چونکه $15 + 25 = 40$

۲۳ بیستمی باشد - ظل و قوس جدا جدا معلومت و مطلوب باشد ظل مجموع

و ظل قفاصل اند و قوس

$$\text{ظل (سه و ع)} = \frac{\text{حب (سه و ع)}}{\text{حب (سه و ع)}} = \frac{\text{حب (سه و ع)} + \text{حب (سه و ع)}}{\text{حب (سه و ع)} - \text{حب (سه و ع)}}$$

و چون باین عوض حب سه و غیره ظل سه و ظل ع را درج نمود هر کدام از بسای صورت
و مخزن گزیر را بر حب سه و حب ع قسمت میکنیم تا این توی نتیجه شود

$$\text{ظل (سه و ع)} = \frac{\frac{\text{حب سه و ع}}{\text{حب سه و ع}} + \frac{\text{حب سه و ع}}{\text{حب سه و ع}}}{\frac{\text{حب سه و ع}}{\text{حب سه و ع}} - \frac{\text{حب سه و ع}}{\text{حب سه و ع}}}$$

باب اول

۲۲

$$\begin{aligned} \text{ولی حسب سه} &= \text{ظل سه} + \text{حم سه} = \frac{\text{ظل سه}}{\text{حم سه}} = \text{ظل سه} + \text{ظل سه} = ۲ \text{ ظل سه} \\ \text{چنین میشود} &= \text{ظل (سه+ع)} = \frac{\text{ظل سه} + \text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ + \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ + ۱ = ۲ \quad (۱۳) \\ \text{و بهمان نحو اینست وی ظل (سه-ع)} &= \frac{\text{ظل سه} - \text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ \quad (۱۴) \end{aligned}$$

۲۴ پس چهارم در قاعده یافتن مقدار حسب ۲ سه و حم ۲ سه و ظل ۲ سه.

در مقام استخراج دستور ۴ ی (۹) و (۱۵) و (۱۳) امتیازی میان سه و ع قرار ندادیم و ممکن است این دو قوس متساوی شوند پس فرض میکنیم سه = ع

و بعد برای استخراج مقدار جیب ۲ سه در دستور (۹) عوض ع قوس را قرار میدهم پس دستور را اینی نقل میکنیم

$$\begin{aligned} \text{جیب (سه+ع)} &= \text{حب سه حم سه} + \text{حم سه حب سه} \\ \text{و بعد از آن نصف چنین میشود} \end{aligned}$$

$$\text{حب سه ۲ سه} = ۲ \text{ حب سه حم سه} \quad (۱۵)$$

و بگذرا چون در ستور ذیل عوض ع قوس سه را قرار میدهم حم ۲ سه معلوم میشود

$$\text{حم (سه+ع)} = \text{حم سه حم سه} - \text{حب سه حب سه}$$

$$\text{و بعد حم ۲ سه} = \text{حم سه سه} - \text{حب سه سه} \quad (۱۶)$$

$$\text{و چون در این دستور ظل (سه+ع)} = \frac{\text{ظل سه} + \text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ + \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ + ۱ = ۲$$

عوض ع قوس سه را قرار میدهم پس ظل ۲ سه باین طور مستنبط شود

$$\text{ظل ۲ سه} = \frac{\text{ظل سه}}{\text{ظل سه}} = ۱ \quad (۱۷)$$

۲۵ پس چهارم مسئله حم سه معلومت و مطلوب باشد حسب ۲ سه و حم ۲ سه

در دستور (۹) یعنی حم ۲ سه = حم سه سه - حب سه سه عوض سه قوس

$$\text{سه را قرار میدهم پس چنین میشود حم سه سه} = \text{حم سه سه} - \text{حب سه سه} \quad (۱۸)$$

مثلثات

۲۳

و چون در این تساوی هر دو جمله هم $\frac{۲}{۳}$ و جیب $\frac{۲}{۳}$ مجهولات باید تساوی دیگرند
آورده و با آن ترکیب نمود پس دستور (۱) را در قوس $\frac{۲}{۳}$ به جاری میکنیم

و اینجا نقاشی میکنیم $۱ = \text{هم} \frac{۲}{۳} + \text{جیب} \frac{۲}{۳}$ (۲)
حال این تساوی (۱۸) و (۲) را جز و بخوابیم دیگر جمع میکنیم چنین میشود

$$(۲) \quad ۱ + \text{هم} \frac{۲}{۳} = ۲ \text{ هم} \frac{۲}{۳}$$

$$\text{و بعد از آن} \quad \text{هم} \frac{۲}{۳} = \frac{۱ + \text{هم} \frac{۲}{۳}}{۲}$$

$$\text{و با کجمله} \quad \text{هم} \frac{۲}{۳} = \sqrt{\pm \frac{۱ + \text{هم} \frac{۲}{۳}}{۲}} \quad (۱۹)$$

و چون تساوی (۱۸) را از تساوی (۲) تفریق کنیم چنین میشود

$$(۵) \quad ۱ - \text{هم} \frac{۲}{۳} = ۲ \text{ جیب} \frac{۲}{۳}$$

$$\text{و بعد چنین} \quad \text{جیب} \frac{۲}{۳} = \frac{۱ - \text{هم} \frac{۲}{۳}}{۲}$$

$$(۲۰) \quad \text{جیب} \frac{۲}{۳} = \sqrt{\pm \frac{۱ - \text{هم} \frac{۲}{۳}}{۲}}$$

و بنا بر آنچه در ۲۰ ذکر شد هر دو علامت \pm را برابر سر جذر قرار دادیم ولی این دستور

را هر وقت بنجائیم در حل مثلثات استعمال کنیم با علامت $+$ اعتبار میکنیم چو نکته آنست

قوس $\frac{۲}{۳}$ که چکتر از ۹۰ درجه است و بنا بر این نصفش که چکتر از ۹۰ درجه و جیب

جیب تمامش هر دو مثبت میشوند نه منفی

پس $\frac{۲}{۳}$ بقیه چون در دستور $\text{جیب} \frac{۲}{۳} = ۲ \text{ جیب} \frac{۲}{۳}$ هم سه عوض

نصف سه را قرار دهیم این تساوی نتیجه میشود

$$\text{جیب} \frac{۲}{۳} = ۲ \text{ جیب} \frac{۲}{۳} \text{ هم} \frac{۲}{۳} \text{ هم} \frac{۲}{۳} \quad (۲۵ \text{ مکرر})$$

و آنرا با این دستور $\text{جیب} \frac{۲}{۳} + \text{هم} \frac{۲}{۳} = ۱$ ترکیب کنیم مقدار $\frac{۲}{۳}$

و هم $\frac{۲}{۳}$ از آن جیب سه استخراج شود

باب اول

۲۴

بیشتر است. مقدار ظل سه معلومت و مطلوب باشد ظل سه
درستور (۱۷) یعنی ظل ۲ سه = $\frac{۲}{۱ - \frac{۲}{۳}}$ ظل سه عوض قوس سه نصف
آنرا قرار میدیم چنین میشود

$$\text{ظل سه} = \frac{۲}{۱ - \frac{۲}{۳}}$$

و چون مجبول و مطلوب ظل سه است سر باب اختصار کتابت آنرا حل فرض کنیم
و مقدار معلوم ظل سه را γ و تساوی چنین شود

$$\frac{۲}{۱ - \frac{۲}{۳}} = \gamma$$

این تساوی از درجه دوم است و بعد از رفع محرز چنین میشود

$$\gamma - ۲ = ۲ \text{ مل} = ۲ \text{ مل}$$

و بعد از آن $\gamma + ۲ \text{ مل} = ۲ - \gamma = ۰$ و با کلمه مل $\frac{۲}{\gamma} + ۱ - \text{مل} = ۰$
و چون بقواعد جبر و مقابله آنرا حل کنیم جواب چنین میشود

$$\text{مل} = \frac{۲}{\gamma + ۱} \pm \sqrt{1 - \frac{۲}{\gamma + ۱}}$$

و حال ظل سه را بجای مل قرار میدیم و ظل سه را بجای γ و آنوقت

$$\text{ظل سه} = \frac{۲}{\frac{۲}{\gamma + ۱} \pm \sqrt{1 - \frac{۲}{\gamma + ۱}}} \quad (۲۱)$$

و این دستور نیز بر دو علامت درج شده ولی اگر قوس سه کو چکتر باشد از ۱۸ و بنا
بر این نصفش کو چکتر از ۹ درجه باید جذر مثبت را اختیار نمود یعنی ضلع γ را با علامت
بیشتر است. دو جاب و دو قوس معلومت و مطلوب باشد دقیق مجموع

۲۸

دو جیب و مجموع دو جیب تمام آنها بعمل کار می
چون قواعد کار تیم جز در ضرب و قسمت و در امثال آن جاری نشود و مقصود ما آنست که
عمل جمیع دو جیب یا دو جیب تمام را بعمل ضرب متبدل کنیم یعنی مجموع آن دو خط مستقیم

مُثَلَّثَات

۲۵

بعمل ضرب استخراج کنیم تا قواعد کاریتیم آن تعلق گیرد
پس دو دستور (۹) و (۱۱) را جمع میکنیم و دو دستور (۱۵) و (۱۲) را جدا تا جوف
و ویم تساوی میزان بی صل ضربی مبدل شود
و من بابتبیل مطلب فرض میکنیم که مقصود آنستکه بعمل کاریتیم معلوم کنیم مقدار حب
صه + حب قه را و دو قوس مثل سه و ع چنان اختیار میکنیم
صه = سه + ع و قه = سه - ع پس

حب صه = حب (سه + ع) = حب سه حم ع + حم سه حب ع
حب سه = حب (سه - ع) = حب سه حم ع - حم سه حب ع
و چون هر دو را جمع کنیم این تساوی نتیجه میشود

حب صه + حب سه = ۲ حب سه حم ع
و چون بفرض صه = سه + ع و قه = سه - ع بعد از جمع این دو تساوی
صه + قه = ۲ سه و سه = $\frac{صه + قه}{۲}$ و بعد از تفریق صه - قه = ۲ ع و
ع = $\frac{صه - قه}{۲}$ حال در تساوی فوق بجای سه و ع معادل آنها را قرار بدهیم چنین میشود
حب صه + حب سه = ۲ حب $\frac{صه + قه}{۲}$ حم $\frac{صه - قه}{۲}$ (۲۲)
و ظاهراًست که از روی این دستور میتوان بعمل کاریتیم مقدار مجموع دو حب را معلوم نمود
رجوع کنید بمثال ۳

۲۹ ببینید که در حال چون حب سه را از حب صه تفریق کنیم این تساوی نتیجه میشود
حب صه - حب سه = ۲ حب سه حم ع
و بعد از آنکه بجای سه و ع معادلشان را قرار بدهیم چنین میشود
حب صه - حب سه = ۲ حم $\frac{صه + قه}{۲}$ حب $\frac{صه - قه}{۲}$ (۲۳)

باب اول

۲۶

همین و میستوان سید بستوریکه از آرزوی مقدار مجموع حم صه + حم م استخراج شود
پس فرض سابق را اینی نقل میکنیم صه = سد + ع و صه = سد - ع و این دو تساوی را از یکدیگر

$$\text{حم م} = \text{حم} (\text{سد} + \text{ع}) = \text{حم سد حم ع} - \text{حم سد حم ع}$$

$$\text{حم م} = \text{حم} (\text{سد} - \text{ع}) = \text{حم سد حم ع} + \text{حم سد حم ع}$$

و بعد از جمع چنین میشود

$$\text{حم م} + \text{حم م} = ۲ \text{ حم سد حم ع} \quad \text{یا آنکه}$$

$$\text{حم م} + \text{حم م} = ۲ \text{ حم} \left(\frac{\text{سد} + \text{ع}}{۲} \right) + \text{حم} \left(\frac{\text{سد} - \text{ع}}{۲} \right) (۲۴)$$

و چون حم م را از جم م تفریق کنیم این تساوی نتیجه میشود

$$\text{حم م} - \text{حم م} = ۲ \text{ حم سد حم ع} \quad \text{یا آنکه}$$

$$\text{حم م} - \text{حم م} = ۲ \text{ حم} \left(\frac{\text{سد} + \text{ع}}{۲} \right) - \text{حم} \left(\frac{\text{سد} - \text{ع}}{۲} \right) (۲۵)$$

چنین بود ستورانیکه از روی آنها میتوان مقدار مجموع و مقدار تفاضل دو جیب و دو
جیب تمام را بعمل بکار تم معلوم نمود

۳۰ بیانی مثال میخواهیم بکار تیم مقدار جیب ۵۴ + جیب ۲۴ را معلوم کنیم

اینجا صه = ۵۴ و صه = ۲۴ و از دستور (۲۲) این تساوی نتیجه میشود

$$\text{صه} + \text{صه} = ۲ \text{ جیب} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) + \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right) (۲۴ - ۵۴)$$

$$\text{یا آنکه} \quad \text{صه} + \text{صه} = ۲ \text{ جیب} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) + \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right)$$

$$\text{و همچنین} \quad \text{صه} - \text{صه} = ۲ \text{ جیب} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) - \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right)$$

$$\text{و} \quad \text{حم} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) + \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right) = ۲ \text{ جیب} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) - \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right)$$

$$\text{و} \quad \text{حم} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) - \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right) = ۲ \text{ جیب} \left(\frac{\text{صه} + \text{صه}}{۲} \right) - \text{حم} \left(\frac{\text{صه} - \text{صه}}{۲} \right)$$

۳۱ بیانی یکم میتوان نیز مقدار مجموع جیب و جیب تمامی با مقدار تفاضل اند و را بعمل بکار

اسان بدست آورد .

مثال جیب ۳۴ + ح ۲ = پ ۲۸ درجه را تا ۹۰ میکیم ۲۸ درجه است

و ح ۲ = ح ۲۸ پس

ح ۳۴ + ح ۲ = ح ۲۸ + ح ۳۴ = ۲ ح ۲۸ = ح ۳۴

مقدار مجموع دو ظل را نیز میتوان بهیول کار تیم معین کرد و این قرار

$$\text{ظل ص} + \text{ظل م} = \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} = \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} \quad (۲۵)$$

$$\text{و بکذا} \quad \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} = \frac{\text{ح ص} - \text{ح م}}{\text{ح م ص}} \quad (۲۶)$$

۳۳ سی قیاسی - چون دستور (۲۲) را بر دستور (۲۳) قسمت کنیم و نتوری دیگر

نتیجه میشود که در اصل مثلثات بکار آید

$$\begin{aligned} \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} &= \frac{۲ \text{ ح ص} + \text{ح م}}{۲ \text{ ح م ص}} = \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} \\ \text{ولی} \quad \frac{\text{ح ص} + \text{ح م}}{\text{ح م ص}} &= \frac{\text{ظل ص} + \text{ظل م}}{\text{ح م ص}} \quad (۲۷) \end{aligned}$$

و چون این معادلات را در تساوی (۱) قرار دهیم این دستور نتیجه میشود

۳۳ سی قیاسی در شرح جدول مثلثاتی - متاخرین از معندین بعد از وضع کار تیم جمع

اعلی را که در اصل مثلثات مقتضی باشند بقواعد کار تیم مجری دارند پس کار تیم عدد

رسمی که در عدم حساب شرح داده شد جدولی در کار تیم خطوط مثلثاتی ملحوظ نمایند تا قبل

ضرورت معطل نمایند و در اکثر جنب جدول اول کار تیم خوب و خوب تمام و اخلال و اصد

ماتمی را از قوس هائیه ابتدا کنند و هائیه به هائیه ضابط کنند و اکنون

مقصود ما بیان قاعده ترتیب ایجاد اولت

مُثَلَّثَات

۲۹

و این قوس قدرت از خط مبکسر $\frac{1}{2}$ که بر آن عاقل کرده و هر دو بطرفین خط اول
مستوی شده یعنی ۲ جیب مد اقصرت از ۲ مد و این قوس اقصرت از ۲
ظل مد پس جیب مد $\frac{1}{2}$ مد $\frac{1}{2}$ ظل مد فهو المطلق
یعنی ششم هرگاه در قوس بسیار کوچکی طول تقوس را عوض طول
جیبش اختیار کنیم مقدار تقریب متعلقی که باین واسطه در نتیجه عمل واقع شود
بسیار قلیل است و هر چند قوس کوچکتر باشد تقریب کمتر است

زیرا که چون از برای این مساوات را جیب مد $\frac{1}{2}$ مد $\frac{1}{2}$ ظل مد
بر جیب مد قسمت کنیم بر این مساوات دیگر فتحی شود $\frac{1}{2}$ ح $\frac{1}{2}$ ح مد
(چونکه ظل مد = $\frac{1}{2}$ ح مد)

چون قوس مد بتدریج تغییر کند بطوریکه اختلافش محسوس نشود هم مد نیز همچنان تغییر کند
(جمع کنیم بشکلی) و آنوقت $\frac{1}{2}$ ح مد نیز با خلاف قلیل متغیر شود و هرگاه قوس
مد صفر باشد ح مد = ۱ و بنابراین $\frac{1}{2}$ ح مد = ۱ پس اگر قوس مد بسیار کوچک
باشد تفاضل این $\frac{1}{2}$ ح مد و ۱ بسیار قلیل میشود و موافق مساوات فوق
تفاضل این $\frac{1}{2}$ ح مد و ۱ بسیار قلیل از آن و عبارت از آن و عبارت از آن قوس مد

بسیار کوچک باشد مقدار $\frac{1}{2}$ ح مد - ۱ بسیار قلیل میشود و آن را $\frac{1}{2}$ ح مد - ۱
و این تقریب متعلقی است که در استعمال قوس مد بجای جیب مد واقع میشود
باشود رسیدن حکم مذکور چنین استنباط شد که باید مد را از قوس بسیار کوچکی گرفت
مثل قوس ۱۰ ثانیه تا بتوان طول خود قوس را در عوض جیب استعمال نمود و مقدار
تقریب متعلق محسوس شود ولی باید اول حد این مقدار را تحقیق معلوم کرد تا اختیار قوس
مد از روی بصیوت باشد و قاعده تعیین این است بر حکم ذیل

سبی هفتم - هفتس که از ربع محیط اقتضای تقاضا شدن با جیب خود قصر است از ربع مکعب خود اقتوس

بناصورت سه - حب سه $\frac{۳}{۴}$

زیرا که چون $\frac{۳}{۴}$ > ظل $\frac{۳}{۴}$ یا آنکه $\frac{۳}{۴}$ > $\frac{۳}{۴}$ حب $\frac{۳}{۴}$

طرفین در خارج ضرب میکنیم چنین میشود $\frac{۳}{۴}$ - حب $\frac{۳}{۴}$ > $\frac{۳}{۴}$ و بعد ضرب میکنیم در ۲ حب $\frac{۳}{۴}$ چنین شود

سه حب $\frac{۳}{۴}$ > $\frac{۳}{۴}$ حب $\frac{۳}{۴}$ = حب سه (بنا بر دستور ۲۰ مکرر) و در این مساوات ۱ - حب $\frac{۳}{۴}$ را بجای حب $\frac{۳}{۴}$ قرار میدهم چنین میشود

سه (۱ - حب $\frac{۳}{۴}$) > حب سه

ولی چون $\frac{۳}{۴}$ است اعظم است از جیب $\frac{۳}{۴}$ پس $\frac{۳}{۴}$ نیز اعظم شود از جیب $\frac{۳}{۴}$ و بعد از آنکه در مساوات فوق بجای حب $\frac{۳}{۴}$ مقدار $\frac{۳}{۴}$ را که اعظم از او است

تفریق کنیم باقی کمتر شود و بطریق اولی سه (۱ - $\frac{۳}{۴}$) > حب سه

یا آنکه سه - $\frac{۳}{۴}$ > حب سه

و بعد از تصرف حزئی سه - حب سه $\frac{۳}{۴}$ فهو المطلوب

سبی هشتم حکم مذکور را در قوس اثنای جاری میکنیم و طول این قوس را در ۳۲ معلوم

کرده ایم قوس $۱۰ = ۱۱۰ ۸ ۳ ۶ ۱ ۱ ۴ ۸ ۴ ۰۰۰۰۰ ۹ ۰۰۰۰۰ ۵ ۰۰۰۰۰$

(قوس ۱۰) $۱۲۵ > ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$

(قوس ۱۰) $۳۲ > ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$

پس ۱۰ قوس ۱۰ - جیب ۱۰ $۳۲ > ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ و بنا بر این چون قوس ۱۰ را در عوض حبش تمام کنیم تقریب عمل بعضی مقدار خواهد شد

۵۰ یعنی جب ۱۳۵ است و اما در قوسهای یک از ۹۰ درجه تجاوز کرده باشند چون
 کدام مکمل قوسی است کمتر از ۹۰ درجه خطوط مثلثاتی آنها بحسب مقدار متخالف با خطوط مثلثاتی
 قوسهای مکملشان بحسب علامت بعضی متحد باشند و بعضی مختلف رجوع کنند به
 ۴۱ چنانکه یکی خطوط مثلثاتی قوسها را که ۵۰ آبه آتفرقی کنند چنانچه در جدول منویم آسان تر و
 زود تر استخراج کنیم از روی دو دستوری که حال مقرر میکنیم
 چون دو دستور ۹ و ۱۱ را بعد از آنکه کنیم و بگذاریم دو دستور ۱۰ و ۱۲ را این دو قوسی

$$\text{حسب (سد+ع) + حسب (سد-ع) = حسب سدحم ع}$$

$$\text{حم (سد+ع) + حم (سد-ع) = ۲ حم سدحم ع}$$

و از روی آنها این دو تساوی

$$\text{حسب (سد+ع) = ۲ حسب سدحم ع - حسب (سد-ع)}$$

$$\text{حم (سد+ع) = ۲ حم سدحم ع - حم (سد-ع)}$$

$$\text{و چون فرض کنیم سد = ۲۰ آنوقت (سد-ع) = (۲۰ - م) ع}$$

$$\text{و سد + ع = (۲۰ + م) ع}$$

حال معادلات سد-ع و سد و سد+ع را چنانچه یافتیم در دو تساوی فوق قرار

میدهیم تا این دو دستور کلی حاصل شود

$$\text{حسب (۲۰ + م) ع = ۲ حم ع حسب م ع - حسب (۲۰ - م) ع (۲۹)}$$

$$\text{حم (۲۰ + م) ع = ۲ حم ع حم م ع - حم (۲۰ - م) ع (۳۰)}$$

جمع قوسهای یک مقصود استخراج جیب و جیب تمام آنها است چون جیبهای یک
 شایع عددی هستند که قدر نسبتش ۵۰ باشد و هر جیب مضرب است از ۵۰ و در طرف
 مقابل سد-ع و سد و سد+ع شایع است عددی که قدر نسبتش ۵۰ باشد ماسه

معادل ۴ فرض نمودیم یعنی ضرب ۴ و ۴ را مساوی ۱۶ گرفتیم تا دو دستور ۲۹ و ۳۰ بکار آیند در استخراج جیب و چوب تمام قوسها بیکه ابتدا از ۱۶ بقضله آخر برقی کنند و در مقام عمل با ۴ م را بتدریج ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ... گرفت پس بعد از اینقد تا چون در جیب

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{حس } ۱ = ۲ \text{ حم } ۱ \text{ آ حس } ۱ \\
 \text{حم } ۲ = ۲ \text{ حم } ۱ \text{ آ حم } ۱ - \text{حم } ۵ = ۲ \text{ حم } ۲ \text{ آ حس } ۱ - ۱ \\
 \text{حس } ۳ = ۲ \text{ حم } ۲ \text{ آ حس } ۳ - \text{حم } ۶ = ۲ \text{ حم } ۳ \text{ آ حس } ۳ \\
 \text{حم } ۴ = ۲ \text{ حم } ۳ \text{ آ حم } ۴ - \text{حم } ۹ = ۲ \text{ حم } ۴ \text{ آ حس } ۴ \\
 \text{حس } ۵ = ۲ \text{ حم } ۴ \text{ آ حس } ۵ - \text{حم } ۱۲ = ۲ \text{ حم } ۵ \text{ آ حس } ۵ \\
 \text{حم } ۶ = ۲ \text{ حم } ۵ \text{ آ حم } ۶ - \text{حم } ۱۵ = ۲ \text{ حم } ۶ \text{ آ حس } ۶
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

و بکذا بعد از آن

و ظاهراست که تمام این اعمال با بسا فی صورت می بندد و چون که خندان بسطی ندارند و جیب تمام بر قوس بواسطه جیب و چوب تمام دو قوس مقدم بر قوس معلوم شود و علاوه بر آن در استخراج چوب و چوب تمامی ضرب عمل ضرب و یک تقییر عملی از آن نیست و چون در هر دو تا و یا جمله ۲ حم ۱۰ مضروب فیته شده است بعد از آنکه از ۹ مرتبه تضعیف کنیم بنا بر آنچه در حساب ذکر شد عمل ضرب مبدل شود و کج

چهارم در خصوص کار تیم خطوط مشکاتی چون مقادیر عدد دیو و جیب و چوب تمام قوس ابتدا از ۱۶ و بقضله آخر تا ۴ درجه شخص شد کار تیمهای سنی آنها را که بقضا ۱۰ است معلوم نموده در جدولی درج نموده اند

و از روی لکارتیم خوب و خوب تمام لکارتیم خلل و اخلال تمام همان قبی را بپشت
این دوستورا استخراج نموده اند

$$\frac{\text{ظلم سو}}{\text{حکم سو}} = \frac{\text{حکم سو}}{\text{حکم سو}} \text{ و ظلم سو} = \frac{\text{حکم سو}}{\text{حکم سو}}$$

و این دو دستور خود بکار ایتام تبدیل میشوند باینصورت

لك ظل سر = لك حب سر - لك هم سر

لك طم سه = لك حم سه - لك حب سه

و از آنقریب هیچ لازم نیست که خود اطفال و اطفال تمام را استخراج کنیم چونکه پوست آنها
لکار تیمشان بدست می آید و در اعمال غیر لکار هم ضرری منظور نباشد

下

سببش آنکه چون نصف قطر را واحد طول فرض نموده ایم (نق ۱۰) جیوب و جیوب تمام جیباً
کو چکتر می‌شوند از واحد غیر از جیب ۹۰ درجه و جیب تمام صفر درجه و بنا بر این لکارتیم آنها را
و همچنین لکارتیمهای نیمی از اضلاع و اضلاع تمام فقط هر است که استعمال چنین لکارتیمها
منفی و در حساب خالی از عسرت نیست و من باب احتراز از این عجیب بر هر کدام ۱۰ واحد اضافت
نموده اند و حواصیل را در جدول ضبط کرده اند

و بعد از این بقدر خبرتی لکارتیمهای خطوط مثلاً قی قوسها از یکسانیه و بالا تر جمیع مثبت
کشته اند و بلکه در قوسهای پست تر از نایه چنین شده و تا یک جزء از چهل هزار جزء ثانیه
لکارتیم خطوط مثلاً قی قوسها بعد از اضافه ۱۰ مثبت است

مثلاً قوس آ = ۰ ۱ ۱ ۳ ۴ ۴ ۱ ۴ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ ۰

٥٠٠٠٠٠ : ١٤١٤١٣٤١١ = ٦٧

عقوبت
۱۰ واحد
شعبه
۵۰ واحد
مجموعه
۵۰ واحد

قبل از دخول در جدول بر آن لکارتیم ۱۰ واحد اضافه کردیم لکن بی آن اضافه منفی باشد
تنبیه نظر باین است که عمودیت از قاعده کلیه سبب و من باب رجحان است
لازمست که در ضمن عمل باین قوسهای کوچکتر از ۵ درجه و قوسهای بزرگتر از آن
قرار دهد و هر کدام را بشناسد این فقره مایه پریشانی خاطرش میشود و لهذا اگر مناسب
میشوند بدو جدول چشم از آن پنهان میشوند و در همه حال قاعده کلیه محفوظ دارد
فرض کنید که بر جمیع لکارتیهای مثلثاتی جدول ۱۰ واحد اضافه شده و بر این فرض
۴۵ را بی استناد معمول دارید ولی وقت خواندن و نوشتن لکارتیم اطلال قوسهای
بین ۴۵ و ۹۰ و لکارتیم اطلال تمام قوسهای واقع بین صفر و ۴۵ درجه
مفصله دارد... اعداد ۱۰ و ۱۱... را منظور دارید و در صورت معلومت که
بر جمیع لکارتیها ۱۰ واحد اضافه شده و هر دو قاعده ما نزد می بماند معمول است

در قانون کانیستما جدول مثلثاتی

در اعمال متعلقه قبل مثلثات بیشتر جدول نصف رقمی کاله را بکار ببرند و گاه جدول
نیم رقمی کاله را نیز استعمال کنند

چهارمین و معرفت جدول کاله - در ابتدای این جدول لکارتیم جیب و ظل
قوسی را ابتدا از یک ثانیه تا ۵ درجه ثانیه باینه ضبط نموده و بنا بر این لکارتیم جیب
تمام و اطلال تمام قوسی را نیز از ۹ تا ۱۵ درجه ثانیه باینه تریب داده و بعد از آن
لکارتیم جیب و جیب تمام و اطلال اطلال تمام قوسی را از ۱۵ تا ۹۰ درجه
ثانیه به ۱ ثانیه درج نموده

و چون خواهیم در جدول داخل شویم در جاتی را که از ۵ کم تر باشد و در فوق صفت
طلب کنیم و قایق و عشرت توانی را در دو ستون اول سمت یار و ل هابط

کاله و لاله اند
و دفتر چندین معروف
و انوی بوده اند که
جدول لکارتیم تر است
اند

این کتاب در بیان مسائل حسابیه و هندسیه و فقهیه و غیره بسیار جامع و مفید است و در هر باب مسائل و جوابات آن را به سادگی و اختصار بیان کرده است و در بعضی جاها نیز به توضیح و تفسیر پرداخته است و این کتاب را هر کس که بخواهد در این فن آموختن و یا در حل مسائل این فن به کار بردن باید که این کتاب را در دست گیرد و آنرا با دقت و تامل مطالعه کند و از هر بابی که بخواهد آموختن را شروع کند و از هر مسئله که بخواهد حل کند به سادگی و اختصار به جواب خواهد رسید.

یعنی از فوق تحت و برگاه قوس از ۴ درجه تا ۹۰ زنده باشد باید در جاش را
در تحت صفحات طلب کنیم و دقایق و عشرت ثوانی را در ستون آخر قیمت
ولی صاعد یعنی از تحت بغوق و اسامی خطوط مثلثاتی را نیز باید در فوق و در
ستونهای لکارتیم طلب نمود بحسب آنکه قوس کوچکتر باشد یا بزرگتر از ۴۵ در
و تفاضل مابین هر دو لکارتیم مثالی جویب و جویب تمام را در مین خود ان لکارتیمها
و فیما بین بزرگتر و کوچکتر ثبت کرده اند و تفاضلات مابین لکارتیمهای ظللال
متحد باشند با تفاضلات مابین لکارتیمهای ظللال تمام همان قوسها و تفاضلات
مشکله را باید طلب نمود مابین دو ستونیکه بعنوان ظل و ظم باشند
نویسند آنکه تفاضل مابین لکارتیمهای وظل و قوس مساویت با تفاضل مابین
لکارتیمهای وظل تمام اند و قوس اینست که از دستور ظل سه × طم سه = ۱
این سوی میخیزد $لک ظل سه + لک طم سه =$
و باز از قوس سه این سوی $لک ظل سه + لک طم سه =$
و بعد از تفریق سوی دوم از اول

$$لک ظل سه - لک ظل سه = لک طم سه - لک طم سه$$

چهار هفتتا بنا بر آنچه ذکر شد اگر قوس مفروض را جز در جات و دقایق و عشرت
ثوانی چیزی نباشد لکارتیم خطوط مثلثاتین با کمال سهولت از جدول کالبر گرفته شود

مثال مطلوب است لک جیب ۳۴° ۴۱' ۴۴"

چون قوس ۴۵° کو چکرات عدد در جاش را در فوق صفحات طلب میکنیم و بعد
بافتن آن ۴۱' را در ستون اول سمت یسار و در جبهه نزول و بعد از آن ۴۴" را
در ستون دومی که سمت مین استون سابق باشد ولی باید آن چلی را خست یا رنمود

که در فصل تحت ۲۱ ثبت شده و آنوقت در طول خط افقی ۴۰ و در ستونیکه بعنوان جیب است لکارتیم مطلوب را طلب میکنیم یعنی باید آن لکارتیم را طلب نمود و رتقای ۴۰ و جیب فوق صفی و اینجا این عدد نوشته شده

$$\text{لک جیب } ۳۳^{\circ} ۲۱' = ۴۰^{\circ} ۲۱' = ۶۰۰۰۰۰۰۰$$

مثال دوم مطلوب است لک حم ۳۵° ۳۰' چون قوس بزرگتر است از ۴۵ درجه ۳۵° را در تحت صفی طلب میکنیم بعد از یافتن ۳۵° را در ستون آخر سمت عین ولی درجه صعود و بعد ابتدا از ۳۵ دقیقه ۲۰° را در ستون سمت یسار و ولی درجه صعود و آنوقت در طول خط افقی و در سمت یسار ۴۰° میگیریم تا بریم ستون لکارتیمی که بفلسف بعنوان جیب تمام است و اینجا این عدد برابر میگیریم

$$\text{لک حم } ۳۵^{\circ} ۳۰' = ۴۰^{\circ} ۳۵' = ۶۰۰۰۰۰۰۰$$

چهارم هرگاه قوس مفروض شامل حادثاتی و بلکه عاثر ثوانی باشد لکارتیم خطوط مثالی را باید بطریق ذیل معلوم نمود

مثال مطلوب است لک حب ۳۶° ۱۹' ۴۳' کرم اول با حادثاتی و با عاشر شمس الشات کنیم و لکارتیم حب ۳۶° ۱۹' ۴۳' را بر و بعد از آن تبدیل ما بین السطین عمل را تمام کنیم و بنهای تبدیل است که تفاضلات ما بین کما شایب فرض میکنیم با تفاضلات ما بین قوسی و اگر چنان فرض نصبت مقرون است و لی تقریب کافیت و دستور العمل را از انقرا است (تنبیه که اول کتاب در خصوص نوشتن اعمال ذکر نمودیم در این موارد بکار آید)

مُثَلَّثَات

۳۹

$$\begin{array}{r} \text{لک حب} \quad ۳۰^{\circ} ۱۹' ۳۰'' = ۹,۷۸۲۷۴۰۰۰ \quad (\text{تفاضل ۱۷۷۷۷۷۷۷}) \\ \text{باشاء} \quad ۳۴ \quad ۹۴ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{لک حب} \quad ۳۰^{\circ} ۱۹' ۳۴'' = ۹,۷۸۲۷۵۰۰۰ \\ \text{باشاء} \quad ۳۴ \quad ۱۸۲۴ \end{array}$$

لک حب ۳۰ ۱۹ ۳۴ = ۹,۷۸۲۷۴۰۰۰ این کار تیم را اول میگویم و تقابل

جدولی ۲۷۶ را بر میگیریم و آن ۲۷۶ واحد اعشاریست از آخر مراتب لک کاریم

پس عمل تعدیل با این تطبیق را چنین بجا میآوریم که چون تفاضل با این دو قسوسه باشد

تفاضل با این کار تیمهای ما باز نشود ۲۷۶ میشود پس اگر تفاضل با این قسوسه آید

باشد تفاضل با این کار تیمها ۲۷۶ واحد میشود و هرگاه تفاضل با این قسوسه ۴ باشد

باید تفاضل با این کار تیمهای و جیب آن قسوسه این باشد ۲۷۶ × ۴ = ۱۱۰۴ و چون

۴ تفاضلی است که با این ۳۰ ۱۹ ۳۴ و ۳۴ ۱۹ ۳۴ موجود است

پس حاصل ضرب مذکور تفاضلی است که باید بازاء آن عمل بسیار نمود و مقدارش در سمت

صورت حساب نموده شده ولی باید صحیح حاصل ضرب را بر کار تیم جدولی اضافه نمود

و کسور را حذف کرد یا رفع نمود چنانچه ما ۹ افزودیم چونکه رقم اول اعشاری حاصل هزاره بزرگتر

چهارم بود بنسبتی که در این محاسبه بناید عمل ضرب را در خارج جدول کانه محوری دارد بلکه باید از

حاصل را معلوم کند و صورت عمل را بر پنج تنویب و دستورش اینست که مضروب عدد را

را که تفاضل جدولی باشد در همین کار تیم نویب و مضروبیه ۴ را در تحت قسوسه

آنوقت هر حاصل ضرب جزئی را در حافظه معلوم کند و تحت کار تیم جدولی بنویسد و

همین چاد و عشرات و آنات از او اعشاری را برح منظر بنیاد و اگر رقم اعشاری محذوف

باشد یا بزرگتر از ده باید آنرا رفع نمود و بر رقم حاد واحدی اضافه کرد و حال من با

توضیح این مطلب چند مثالی آوریم

مثال اول مطلوب است لک حب ۳۰ ۱۹ ۳۴ ۳۴ ۱۹ ۳۴

باب اقلک

للحب "م ١٩' ٣٦ = ٤٠٦٨٢٦٤ (تفاضل ٢٦٤)

٣	بازاء
٤	بازاء
١٣	
١١	

للحجب $9,7127500 = 36^{\circ} 19' 43''$
مثال - قيم مطلوباً لك ظل $31^{\circ} 29'$

للتظل
بازاء
بازاء

٢٩ = ٣١
٣١
٣١

(تفاضل ٤٧٣)

لك ظل $31^{\circ} 29' 48''$ = $9, 2122617$
 مثال مطلوب لك حم $51^{\circ} 19' 44''$

للكم ٥٠' ١٩' ٥١" = ٩٠٧٢٠١٧٣٤ (تفاضل ٣٤١)
 بلاء - ١

الحجم ٩' ٤' ١٩' ٥ = ٩١٧٢٥١٧٥ = ١٧٥١٧٢٥١٧٥
مثال چهارم مطبوعات لك طم ٩ ٤ ٣ ٢ ١ ٧ ٥

۹۵۶۷۵۷۹۶ = ۶۹
 ۱۲۹
 ۱۹
 (فاضل ۱۴۶)

$9,567,5944 = 9,567,5944$ للعلم

وکر ۳۳ فاضل مبین ۶، ۷ آیت و ۴۰

شرح مثال اول - چون مقصود از ضرب ۶۲۷ در ۳۳ یعنی حاصل ضرب است
صورت عمل را بنویسیم و باین دستور رفتار نمودیم: مضروب فی جزء ۳ را در یکن
و آن (۳) است مضروب ۶۲۷ را در یسار (تفاضل ۲۷) ۳ و در عجز
کردیم شد ۸ ارقام را ثبت کردیم و چون اعظم است از ۵ رفع نموده واحدی
از مرتبه جا و اضاف کردیم و محفوظ داشتیم تا بر حاصل ضرب بعد ۲ واحد بنویسیم و بعد از

باب اول

۴۲

$$\begin{array}{r}
 \text{لک جیب مل} = ۹۶۳۰۵۱۲۱ \\
 \text{بازاء} \quad ۹۶۳۰۵۶۱۹ \\
 \hline
 ۱۳۲ \\
 \text{بازاء} \quad ۲۵۱۶۱۲۹ = \text{مل}
 \end{array}$$

(شاضل ۴۴) ۲۵ ۱۶ ۱۰"

شیخ عماد در جدول داخل می‌نویسم میان لکارتیمهای جیب لکارتیمی طلب میکنم که کمتر باشد از لکارتیم مفروض و لی کمال قرب بان نوشته باشد و آن ۹۶۳۰۵۶۱۹ است و قوس بازالیش این ۲۵ ۱۶ ۱۰" پس این لکارتیم را از لکارتیم مفروض تفریق میکنم باقی میماند ۱۳۲ و تفاضل جدولی باین لکارتیم جیبی که برگزیده‌ام و تائیدش را نشان میکنم اینست ۴۴۴ و حال تعدیل باین نظیر چون تفاضل باین لکارتیم مقدار ۴۴۴ و واحد عشر از مرتبه اخیر باشد اختلاف باین دو قوس آنرا که ۲۵ ۱۶ ۱۰" و ۲۵ ۱۶ ۲۰" باشند است و بنابراین اگر اختلاف باین دو لکارتیم واحد باشد تفاضل باین دو قوس این ۱۰" میشود و اگر اختلاف باین لکارتیم جیب ۲۵ ۱۶ ۱۰" و لکارتیم جیب قوس مجول ۱۳۲ باشد باید تفاضل باین دو قوس بازاء آن این باشد ۱۳۲ × ۱۰ = ۱۳۲۰ و محاسب این که بر تا عشر ثانیه در کنار بجا آوریم خارج قسمت ۹ شد و آنرا بر ۲۵ ۱۶ ۱۰" اضافه کردیم قوس مطلوب بدست آمد

و بر محاسب لازمست که انفعیل قیمت جزئی را در ذهن مجربى دارد چنانچه حال نظر سیر

$$\begin{array}{r}
 \text{لک حب مل} = ۹۶۳۰۵۱۲۱ \\
 \text{بازاء} \quad ۹۶۳۰۵۶۱۹ \\
 \hline
 ۱۳۲۰ \\
 \text{بازاء} \quad ۴۲۸۰
 \end{array}$$

(شاضل ۴۴) ۲۵ ۱۶ ۱۰"

شیخ عماد - لکارتیمی شرط سابق از جدول برگزیده‌ام و در تحت لکارتیم مفروض ششم

مثلثات

۴۳

و یقین کردیم و در عین ۱۳۲ صفری طی نمودیم و ۱۳۲۰ را از دور بر ثاصل جدوع ۴
 قیمت کردیم خارج قیمت ۲ واحدش یعنی ۲ ثانیه و ۴۴۴ را در ۲ ضرب کرده حاصل
 از قسوم ۱۳۲۰ یقین کردیم باقی ماند ۴۲۸ صفر دیگر را وقتی ساخته قیمت کردیم بر
 رقم دوم خارج قیمت ۹ شد و آن اشرار ثانیه است و چنین نوشتیم ۹ و از برای کاتیم
 جدول اضافه کردیم مطلوب بدست آمد

مثال دوم لك ظل مل = ۹۱۱۶۰۹۶۴ و مطلوب است قوس مل

$$\begin{array}{r} \text{لك ظل مل} = 91160964 \\ \text{بازاء} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91160964 \\ 3301630 \\ \hline 2250 \end{array}$$

مثال ششم لك حم مل = ۹۱۶۳۱۹۴۰۲ و مطلوب است قوس مل

$$\begin{array}{r} \text{لك حم مل} = 916319402 \\ \text{بازاء} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916319402 \\ 328 \\ \hline 2800 \end{array}$$

مثال چهارم لك طم مل = ۹۱۶۶۰۷۱۱۶ و مطلوب است قوس مل

$$\begin{array}{r} \text{لك طم مل} = 916607116 \\ \text{بازاء} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916607116 \\ 3970 \\ \hline 240 \end{array}$$

بقینه درد و مثال اخیر کاتیمی را که از جدول برگرفتیم بلا فصل برتر از کاتیم مفروض است
 زیست و نکته اش نیست که میجو ایسم تعدیل مابین السطین مانند دو مثال اول اضافی
 کرد و نقصانی زیر که هر چند کاتیم جیب تمام مایکاتیم خل تمام نقصان نیزه و قول نظر بر شی

باب اول

۴۴

پنجاه قی در شرح جدول لالاند - در این جدول الکار تیمهای چوب جنوب تمام و طول
واظلال تمام قی را از یک دقیقه تا ۹۰ دقیقه به سبقت ۵ رقم عشر ضبط کرده اند و عدد
درجات و اسمی خطوط مثلث را تا قوس از ۵۴ درجه تا و زمره باشد بر سر آنها
نوشته اند چون قوس از ۵۴ درجه تا و زمره باید آنها را در تحت همان ستونها طلب
منوود و در صورت اول قایق را باید در ستون اول سمت یسار و درجه هبوط
بر گرفت و در صورت دوم در ستون آخر سمت یمن و در جهت صعود و فصل
باین هر دو الکار تیم مثلاً قی جنوب و جنوب تمام را در ستون کوچکی که در یمن هر که است طلب
کنند و تفاضل باین هر دو الکار تیم ظل مساویست با تفاضل باین هر دو الکار تیم ظل تمام
همانقوسها ۵۴ و این تفاضل مشترک را باین دو ستون طلب کنند که بعنوان اطل و ظل
بقیة کالیه و لالاند نام و دفعه مندرج است که دو جدول مذکور را ترتیب داده اند و اوقات
آنها فرنگی است و با سبب لغت خارجه مرتب شده و چون سوز در زبان ما جاش ۱۰
و استنساخ آنها بسیار مشکل است و علاوه بر آن تحصیل جدول فرنگیش بسیار است
و چند قیمتی ندارد شرح جدول الکار تیمی که در حساب ذکر نمودیم شرح جدول مثلاً قی
که انجامیان کردیم جمعاً مطابق اند با آن جدول فرنگی و بر فرض آنکه بیک فارسی نوشته
شوند چند تغییر در شرح مذکور عارض نمیشود

۵۲

پنجای شصت بعد از این اشارات چون قوسی فرض کنیم صاحب درجات و دقایق شده
پیش الکار تیم خطوط مثلاً قی و سانی از آن جدول برگرفته میشود

۵۳

مثال مطلوب است لك حسب ۲۹ ۳۷

چون قوس از ۵۴ که است پیش در فوق صفحات طلب میکنیم بعد از یافتن ۳۷
را در ستون اول سمت یسار و لی درجه هبوط و در تحت ۳۰ پیش در یمن ۳۷ خط

افقی لکارتیم مطلوب ضبط است از این قرار

$$\text{لک حب } ۲۹^{\circ} ۳۷' = ۹۰۳۹۳۹۰$$

مثال دوم مطلوب باست لک ظم $۶۱^{\circ} ۴۳'$

قوس از ۴۵ درجه تجاوز نموده ظل تمام ۶۱ را باید در کت صفحات طلب نمود و بعد از یافتن ۳۳ م رادرسون آخر سمت یمن و درجه صعود و بر خط نقیض در ستونی که بعنوان ظم ۶۱° است لکارتیم مطلوب با لک ظم $۶۱^{\circ} ۴۳' = ۹۰۳۹۳۹۰$

نیجا چهارم - حال قوسی فرض میکنیم که صاحب ثوابی باشد

۵۴

مثال مطلوب باست لک حب $۳۱^{\circ} ۲۷'$ م

اول ثوابی را منظور نمائیم و بدستور العمل فوق لک حب $۳۱^{\circ} ۲۷'$ رادرجه اول طلب میکنیم و بتعویل باین السطین انچی بازه ثوابی باشد حساب کرده لکارتیم مطلوب را معلوم میکنیم بنهای تعدیل چنانست که تفاضل باین هر دو لکارتیم را مناسب فرض کنیم با تفاضل باین و قوس آنرا و این نسبت اگر چه محقق نیست ولی اختلاف اندک است و تقریب در اعمال ستمیه کافی باشد و صورت عمل اینست

$$\begin{array}{r|l} ۴۳ & ۶۰ \\ \hline ۸۶۰ & ۱۱۴ \\ ۲۶۰ & \end{array} \quad \text{لک حب } ۲۷^{\circ} ۳۱' = ۹۰۳۹۳۹۰ \quad (\text{تفاضل } ۲)$$

لک حب $۳۱^{\circ} ۲۷' = ۹۰۳۹۳۹۰$ بازه ۱۴
 لک حب $۳۱^{\circ} ۲۷' = ۹۰۳۹۳۹۰$ رادرجه اول طلب میکنیم و تفاضل باین لکارتیم و بعد از ۲۰ فیستم از عشار مرتبه اخیر پس کویم چون تفاضل باین و قوس یکدقیقه باشد اختلاف باین و لکارتیم ۲۰ میشود و اگر تفاضل یکثانیه باشد اختلاف $\frac{۲۰}{۶۰}$ میشود و حاصل ۳۳ م باشد اختلاف باین لکارتیم حب $۳۱^{\circ} ۲۷'$ و لکارتیم حب $۳۱^{\circ} ۲۷'$ ۳۳ م انقدر میشود $\frac{۴۳ \times ۲۰}{۶۰}$ و این اختلاف را در سمت یمن صورت عمل معلوم

باب اول

۴۶

کرده و حاصل ۱۴ را بر کاریم ۲۸۱۳۱ اضافه کردیم

مثال دوم مطلوب است لك حم ۶۷۴۳۸۵۵ (ثاصل ۳)

$$\begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۲ | ۶۰ \\ ۹۶۰ | ۱۶ \\ ۳۶۰ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۶۷۴۳۸۵۵ \\ ۱۶ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۳۰ \\ ۳۲ | ۶۰ \\ ۹۶۰ | ۱۶ \\ ۳۶۰ \end{array}$$

$$\text{لك حم } ۲۸۱۳۱۴۹ = ۹۵۸۱۱۴۹$$

بنیت چون خوانیم کاریم چنانچه یا ظل تمامی را از جدول بر گیریم باید قوسی را که با
فضل برتر از قوس مفروض باشد در جدول طلب کنیم (رجوع کند به ۵)
نچاه پنجم در حل عکس شده مذکور کاریم یکی از خطوط مثلثاتی قوسی

معلوم است و مطلوب باشد تفویض آن یعنی درجات انقوس

$$\text{مثال لك حب مل } ۹۵۸۱۱۴۹ \text{ و مطلوب است قوس مل}$$

صورت عمل نیست

$$\begin{array}{r} ۱۸ \\ ۶۰ \\ ۱۰۸۰ | ۳۱ \\ ۱۵۰ | ۳۵ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۲۲^\circ ۲۵' \\ ۳۵'' \end{array} \quad \begin{array}{r} ۹۵۸۱۱۴۹ \\ ۹۵۸۱۱۳۱ \\ ۱۸ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۲۲^\circ ۲۵' ۳۵'' \\ ۱۸ \end{array}$$

شهرک در جدول ظل میوم و در ستون چوب طلب کنیم کاریم که در نقصان کار
قرب بکاریم مفروض شده باشد غایت ۹۵۸۱۱۳۱ و قوس با بار این ۲۲
۲۵' کاریم جدولی از کاریم مفروض تفریق میکنیم و باقی میماند ۱۸ و فضل جدول
باین کاریم جیب ۲۲ ۲۵' و کاریم جیب ۲۲ ۲۵' غایت ۳۱ و بعمل میآید
چون اختلاف باین دو کاریم ۳۱ باشد تفاضل باین دو قوس یکدیگر می شود و اگر
اختلاف واحد باشد تفاضل ۱ می شود و اگر آن اختلاف باین کاریم جیب مل

مُثَلَّثَات

۲۷

ولکار تیم جیب ۲۵' ۲۲" بمقدار ۱۸ باشد تفاضل با این مل و ۲۵' ۲۲" ۱۲۲
 میشود $\frac{1}{31}$ یا $\frac{11}{31}$ و این تفاضل را درست یا حساب کرده ۳۵ شد

$$\text{مل} = ۲۲' ۲۵'' ۳۵$$

تقریب ارجح ایند ماینه میرسد و بر فرض آنکه تفاضل با این قوسها تقریب باشد تفاضل
 این کار تیمها محض آنکه رقم اخیر کار تیمها قریب واحدی تقریب دارد
 قوس مطلوب بتعذیل این لفظ یا چند ثانیه تقریب بشود و البته محض همین اختلاف
 عدد توانی تقریب تا ۵ و ۶ میرسد و در مقام تدقیق باید جدول هفت قوس را استعمال نمود

مثال دوم لک حم مل = ۹. ۱۰۶۲۲ و مطلوب است قوس مل

$$\begin{array}{r} \text{لک حم مل} = ۹. ۱۰۶۲۲ \\ \text{بازاء} \quad ۹. ۱۰۶۳۱ \\ \hline - ۹ \\ \hline ۳۶ \\ ۵۰ \quad ۵ \quad ۳۶ = \text{مل} \end{array}$$

(تفاضل ۱۵) ۵۰ ۹

$$\begin{array}{r} ۱۵ \\ ۵۴۰ \overline{) ۹۰۳۶} \end{array}$$

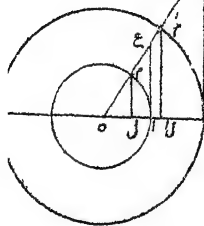
بیشتر چون محاسبات کار تیم جیب تمام با کار تیم ظل تمامی را در جدول مقوس کنیم بهتر است که
 کار تیمی اضافی طلب کنیم که کمال قریب کار تیم مفروض داشته باشد تا تعذیل اضافی شود
 کار تیم مفروض را از او بقیه کنیم (رجوع کنید به آخر ۵ و ۶)

باب دوم در حل مُثَلَّثَات

۵۶ پنجاه و ششم چون دست آمده است استخراج مقادیر خطوط مثلثاتی که نسبت خطوط
 بر نصف قطر واحد مناسب است که ذکر کنیم وابط و نسب موجوده متخفا بین آنها در
 اضلاع هر مثلث راست و بعد بیان کنیم قاعده حل مثلثات را بواسطه این روابط
 ۵۷ پنجاه و هفتم از اینجا تا آخر کتاب دیگر لفظ قوس استعمال نکنیم و عوض آن وایامی
 را مقصود داریم مثلاً عوض جیب فلان قوس یا جیب تمامش یا ظلش گوئیم

در عرض قوس باشد
جایز است و بعضی
از آن لازم نیاید
زیرا که

جیب فلان زاویه را جیب تمامش یا ظلش ولی بعضی زاویه است که مقابل
باشد با قوس و معلومست که اختیار زاویه چون نصف قطر امسوی با و احد
فرض نمودیم مقدار خطوط مثلثاتی بر وجهیکه استخراج شد بر بوط میباشند بعد از
قسی به طول آن قوسها و طول جیب اختلاف نصف قطر تغییر دوتا عدد درجات متغیر
شود با وجود اختلاف انصافا قطار قوسی مقابل باشند باز و ایای هرگز به مشخه و
مخصوصا باشند باین ضلع معاد بر خطوط مثلثاتی تغییر کند چرا که نسب باینها
و نصف قطر بحالت خود باقی باشند و تغییر نکند چنانچه اگر زاویه ا ه م و دو قوس
محصور ا م و ا م و جیب و جیب تمام و اضلاع آنها را در شکل رسم کنیم معلوم میشود
که $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{م} = \frac{ج}{م} = \frac{ج}{م}$ و $\frac{ج}{م} = \frac{ج}{م} = \frac{ج}{م} = \frac{ج}{م}$ و چون در
مطلق مقیاس است بهم در زاویه و بهم در قوس مقابلش و معرفت عدد در ضلع
مقدر هر دو بلا تفاوت معلوم شود میتوان گفت که هر دو مثلثاتی چنانچه نظیر است
است نظیر زاویه مقابل با قوس نیز باشد و از آن روی مقدار هر دو مشخص شود
پنجایه ششم قرار بر این میگیریم که تا آخر کتاب و ایای ثلاثه هر مثلث را بحرف ج
و ه بنمایشیم و اضلاع مقابل آنها را با حروف که خرفی اختلافی من باب خبر داشته
باینصورت ج و د و ه و ز را قیامه هر مثلث قایم الزاویه را بحرف ح بنمایشیم
و وترش را بحرف ح

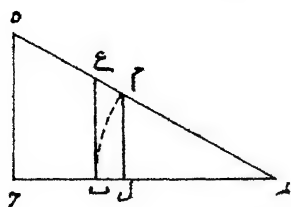


در صورت روابط ما بین زوایا و اضلاع هر مثلث قایم الزاویه
پنجایه هفتم قضیه دهر مثلث قایم الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین زاویه
قایمه ما و نسبت با حاصل ضرب وترش در جیب زاویه مقابل به آن ضلع

د = ح ه م

بعضی

برها - از مرکز و نصف قطر واحد طول قوسی رسم کنید چون م ب که از طرف
مشی شود بصلعین زاویه و عمود م را خارج کنید و آن جیب زاویه است
پس نشان دو مثلث م م م



این شب نسبت به یهود $\frac{25}{44} = \frac{40}{44}$

باین تناسب $\frac{2}{1} = \frac{3}{1}$ و نابراین

۶۰ شصتم چون دوزاویه α و β تمام میگردند جیب $\alpha + \beta = \text{حم } \theta$ و لهذا
 $\text{د} = \text{حم } \theta$ یعنی در هر مثلث قائمه الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین
 مجاور بزواویه قائمه مساویست با حاصل ضرب وتر در جیب تمام زاویه که
 محاور باشد با ضلع

شبهه قضیه در مثل قائم الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین را
قائمه مساویست با حاصل ضرب ضلع دیگر همان زاویه در ظل زاویه مقابل^{تقابل}ه
د = ه ظل

برہا۔ خلّ خمس م ب راریم میکنم و ا ب ع است آنوقت بشاہ مثلاً
 م ع ب و د ه ح این شائبہ تخمین شود $\frac{ح}{ع} = \frac{د}{ب}$ یا این تناسب
 $\frac{د}{ه} = \frac{ب}{ا}$ و بنا بر این د = ه ظلّ د

هـ = $\frac{2}{4}$ و بنابرین د = هـ ظلء

مثلث
 شصت و یک
 قائم الزاویه مقدار هر کدام از ضلعین زاویه قائمه مساوی است با حاصل
 ضلع دیگر در مثل تمام زاویه مجاوره بضلع اول
 تساوی د = ه ظل از ترکیب و قضیه سابق نیز استباط شود باینکه

باب نهم

ه ه

تساوی د = ح ب و راقست کنیم بر تساوی ه = ح ب و تا این تساوی

پیشم شود $\frac{د}{ح} = \frac{ح}{ب}$ یا آنکه $\frac{د}{ح} = \frac{ح}{ب}$ و بنا بر این د = ه ظل و

در معرفت روابط با این زوایا و اضلاع هر مثلث غیر قائم الزاویه

شکل قضیه در هر مثلث مستقیم الاضلاع نسبت سه ضلعش به یکدیگر

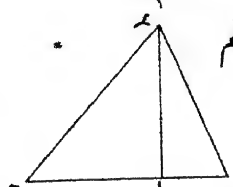
۶۳

مثل نسبت د و ایای مقابل به آن اضلاع است نظیر

بروها از رأس مثلث عمود ما را بر قاعده خارج میکنیم

آنوقت بر مقتضای قضیه سابقه ۵۹ در مثل قائم الزاویه

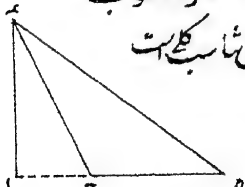
۱۵ این تساوی حاصل میشود $د = ح ب$ و



و در مثل قائم الزاویه د = ح ب و این تساوی $د = ح ب$ و بنا بر این

ح ب = ه و $ح ب = ه$ و طرفین این تساوی را بر ه ح ب قسمت میکنیم وقت

ح ب = ه و $\frac{ح ب}{ه} = \frac{ح ب}{ه}$ یا آنکه $\frac{ح ب}{ه} = \frac{ح ب}{ه}$ فصول المطلوب



ممکن است که عمود ما در خارج مثلث واقع شود ولی ثابت است

و باین اختلاف وقوع متغیر شود چرا که در مثلث ۱۵

ضلع د = ح ب و در مثلث ۱۶

ضلع د = ح ب و چون در زاویه د = ح ب و د = ح ب و د = ح ب

د = ح ب پس د = ح ب یا آنکه د = ح ب و لهذا

ح ب = ه و $\frac{ح ب}{ه} = \frac{ح ب}{ه}$ پس $\frac{ح ب}{ه} = \frac{ح ب}{ه}$

شکل چهارم قضیه در هر مثلث مستقیم الاضلاع مجذور هر کدام

۶۴

از ضلع منافیست با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف تمام

ضرب این دو ضلع در حقیقت تمام زوایا حاد و منفرجه این دو ضلع

مثلثات

۵۱

$2 = 2 + 2 - 2$ در شکل اول منزه سابق بعد از اخراج عمود ۱ بنا بر آنچه در اصول هند منبر
 ساختیم $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{2} \times 2$ یا اینکه $2 = 2 + 2 - 2$
 $\times 1$ و در مثلث ۱ چون زاویه قائمه است ضلع ۱ = هر دو ضلع دیگر پس در
 تساوی سابق ۱ را بدل میکنیم به هر دو ضلع و آنوقت $2 = 2 + 2 - 2$ هر دو ضلع هر دو
 فیه المطلوب

حکم مذکور کلی است اگر چه ضلع اول ۲ مقابل باشد زاویه غیره زیرا که در بیانات فوق
 حکم بندی $2 = 2 + 2 - 2 \times 1$ (شکل دوم منزه سابق)
 و در مثلث قائم الزاویه ۱ ضلع ۱ = هر دو ضلع دیگر و در زاویه ۱ و ۱ و ۱
 ممکن بود یکدیگر و بنا برین هر دو ضلع ۱ = هر دو ضلع دیگر پس هر دو ضلع را بدل
 میکنیم به هر دو ضلع و آنوقت

$2 = 2 + 2 - 2$ در هر دو ضلع
 حال چون حکم قضیه را در هر دو ضلع جاری کنیم این تساوی حاصل میشود

$$2 = 2 + 2 - 2$$

$$2 = 2 + 2 - 2$$

$$2 = 2 + 2 - 2$$

ششگونی و اکنون رابطه دیگر را بین ضلع و زاویای مثلث ثابت میکنیم و آن نیز در

مثلثات بسیار در کار است

قضیه دوم هر مثلث ما بین دو ضلع ۱ و دو زاویه ۱ و ۱
 متقابله باشد و ضلع رابطه ذیل محقق است

$$\frac{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱-۲)}{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱+۲)} = \frac{۳-۲}{۳+۲}$$

برها - چون ثابت شد که $\frac{\text{حس } ۲}{\text{حس } ۱} = \frac{۲}{۳}$ از طرفین این سوی واحدی تقریر میکنیم

پس $\frac{۲}{۳} - ۱ = \frac{\text{حس } ۲}{\text{حس } ۱} - ۱$ یا آنکه $\frac{۳-۲}{۳} = \frac{\text{حس } ۲ - \text{حس } ۱}{\text{حس } ۱}$ (۱)

و بر طرفین همان سوی واحدی اضافه میکنیم آنوقت

$\frac{۲}{۳} + ۱ = \frac{\text{حس } ۲}{\text{حس } ۱} + ۱$ یا آنکه $\frac{۳+۲}{۳} = \frac{\text{حس } ۲ + \text{حس } ۱}{\text{حس } ۱}$ (۲)

پس تساوی (۱) را بر (۲) قسمت میکنیم این تساوی نتیجه میشود

$$\frac{\text{حس } ۲ - \text{حس } ۱}{\text{حس } ۲ + \text{حس } ۱} = \frac{۳-۲}{۳+۲}$$

ولی $\frac{\text{حس } ۲ - \text{حس } ۱}{\text{حس } ۲ + \text{حس } ۱} = \frac{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱-۲)}{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱+۲)}$ (۳۲)

پس $\frac{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱-۲)}{\text{ظل } \frac{1}{4} (۱+۲)} = \frac{۳-۲}{۳+۲}$ فهو المطلوب
شش ششم برگاه در مثلثی اجزای چند بر ما معلوم باشد چنانچه از روی آن اجزای ششم
مثلث را مشخص کنیم آنوقت ممکن است که بواسطت روابط مذکوره مثلث را حل کنیم
و اکنون مقصود ما حل انواع مثلثات مستقیمه بخطوط است بنا بر آنکه سه جزء اصلی هر کدام
باشد مشروط بر آنکه در آن سه جزء اقلایک ضلع مندرج باشد و ابتدا میکنیم حل مثلثات قائمه
الزوا یا جمیع حالات آنرا ذکر میکنیم

در حل مثلثات قائمه الزوا یا

شش هفتم در این نوع مثلثات زاویه قائمه خود معلومست و در این صورت معرفت
دو جزء دیگر کافیت مشروط بر آنکه اقلایک زاویه معلوم ضلع باشد و حالات ممکنه منضم
در چهار است

شکستنی حالت اول معلومات و تر است و زاویه حاده ۴

۶۸

و مجهولات زاویه و د و ضلع د و ه

باید این سه رابطه را معمول داشت اول $ه = ۹۰ - ۴ = ۸۶$ دویم $د = ۲$ حسب ۴

سیم $ه = ۲$ هم ۴

و مقدار د و ه را از روی جدول مثلاً فی استخراج کنیم پس دستور دویم و سیم را

بر رعایت قاعده ۴ بلکاریم تحویل کنیم از اینقرار

$$لک د = لک ۲ + لک حسب ۴ - ۱۰$$

$$لک ه = لک ۲ + لک هم ۴ - ۱۰$$

و در اینجا لک حسب ۴ و لک هم ۴ بلکاریم جدولی حسب ۴ و جیب تمام

میباشد (رجوع کنید به ۴)

قاعده
و

شکستنی حالت دوم معلومات و تر است و ضلع د و ه و زاویه

۶۹

و مجهولات ۴ است و ه و ه

پس این روابط را استعمال میکنیم

$$اولاً د = ۲ جیب ۴ و بنابراین جیب ۴ = \frac{۲}{۲}$$

$$و ثانیاً $ه = ۹۰ - ۴ = ۸۶$ و ثالثاً $د = ۲ = ۲ - ۱ = ۱$ (د + ۲) (د - ۲) جیب ۴$$

و مقدار ه را از روی جدول استخراج میکنیم و لهذا بر وفق قاعده ۴

دستور اول و سیم را بلکاریم تحویل میکنیم پس

$$لک حسب ۴ = لک د - لک ۲ + ۱۰$$

یا لک ۴ = لک د + متع لک ۲ (متع عدمت متمم عدد ۴)

$$و لک ۴ = \frac{۱}{۲} [لک (د + ۲) + لک (۴ - ۲)]$$

رابطه ذیل را نیز برای یقین هر استعمال کنیم

$$ه = ۲ ح م$$

$$\text{و بنا بر این } لك = ه = ۲ لك + لك ح م - ۱۰ = ۴$$

و مابعد از این بی شاره قواعد ۴ و ۵ را در مقام خود استعمال کنیم
هفتا حالت سیم - معلومات ضلع دجا و بزویه قائمه است و زاویه

خاده ۴ و مجهولات ۵ است و ۲ و ۵

پس روابط ذیل را استعمال کنیم

$$اولاً ه = ۹۰ - م$$

$$\text{ثانیاً د} = ۲ ح م \text{ و لهذا } \frac{د}{ح م}$$

$$\text{ثالثاً ه} = د ط م$$

و باید مقدار ۲ و ه را از روی جدول استخراج کنیم پس دستور دوم و سیم را بکار

تحويل کنیم $لك = ۲ = لك - لك ح م + ۱۰ = لك + د + مع لك ح م$

$$لك = ه = لك + د + لك ط م - ۱۰$$

و چون ۱ کمتر باشد از ۴۵ درجه چنین می‌وسیم

$$لك = ه = لك + د + لك ط م - ۴۵$$

هفتاد و یکم حالت چهارم - معلومات دو ضلع دو و محیط بزویه قائمه

و مجهولات ۴ است و ۵ و ۲

پس این روابط را استعمال کنیم

$$اولاً د = ه ظل م \text{ و از اینجا } ظل م = \frac{د}{ه}$$

$$\text{ثانیاً ه} = ۹۰ - م$$

مثلاث

۵۵

ثالث د = ح ب م و از اینجا ل = ح ب م

و ستور م و ل را بکار بستم تا جمل میکنیم از اینقرار

لک ظل م = لک د - لک ه + ۱۰ = لک د + مع لک ه

لک ل = لک د - لک ح ب م + ۱۰ = لک د + مع لک ح ب م
و چون بکار بستم ظل م را از ه امتیاز بیا بستم دلیل است بر آنکه درجات م از ه غایت
کرده و آنوقت قبل از دخول در جدول باید ده واحد از آن تفریق کرد
و حال چند مثالی در شرح و ستورات مذکوره ذکر میکنم

مثلاً در مثلث قائم الزاویه مقدار ل = ۲۷، ۴۳، ۵۴ و ۶۳

ح ب م باید سایر اجزای معلوم کرد

جواب مجهولات

$$\begin{aligned} \tilde{27} \tilde{43} \tilde{54} &= 0 \\ 431, 163 &= 1 \\ 320, 955 &= 2 \end{aligned}$$

معلومات

$$\begin{aligned} 543, 27 &= 1 \\ 31 \tilde{43} \tilde{54} &= 2 \end{aligned}$$

و ستور اول ۰ = ۹۰ - ۴

و قیوم د = ح ب م و از اینجا لک د = لک ل + لک ح ب م - ۱۰

سیم ه = ح ب م و از اینجا لک ه = لک ل + لک ح ب م - ۱۰
و با مفدیه ستورات را چنان بنویسیم که در استعمال جدول مناسب داشته باشد

در تعیین مقدار

$$\begin{aligned} 19' 59'' &= 90^\circ \\ \frac{53' 14''}{360} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

باب دوم

۵۶

در استخراج مقدار

اول تعیین لك حـ

$$\begin{array}{r} \text{لحـ} ۳۰^{\circ} ۴۷' ۵۳'' = ۹,۹۰۶,۸۵۵,۹ \\ \text{بازاء} ۱۲۳ \end{array}$$

$$\text{لحـ} ۳۸^{\circ} ۴۷' ۵۳'' = ۹,۹۰۶,۸۱۸,۲$$

دوم تعیین دانو لك د

$$\begin{array}{r} \text{لـ د} = ۲,۶۴۱,۸۳۳,۹ \\ \text{بازاء} ۲,۶۴۱,۸۳۰,۹ \\ \text{بازاء} ۳۰ \\ \text{د} = ۴۳۸,۱۶۳ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{لحـ} = ۲,۷۳۵,۰۱۵,۷ \\ \text{لحـ} = ۹,۹۰۶,۸۱۸,۲ \end{array}$$

$$۱۲,۶۴۱,۸۳۳,۹$$

$$\text{لـ د} = ۲,۶۴۱,۸۳۳,۹$$

$$\text{د} = ۴۳۸,۱۶۳$$

در استخراج مقدار

اول تعیین للحـ

$$\begin{array}{r} \text{لحـ} ۴۰^{\circ} ۴۷' ۵۳'' = ۹,۷۷۱,۲۵۵,۱ \\ \text{بازاء} ۵۸ \end{array}$$

$$\text{لحـ} ۳۸^{\circ} ۴۷' ۵۳'' = ۹,۷۷۱,۲۶۰,۹$$

دوم تعیین ه اردو لك هـ

$$\begin{array}{r} \text{لـ هـ} = ۲,۵۰۶,۳۷۶,۶ \\ \text{بازاء} ۲,۵۰۶,۳۶۹,۷ \\ \text{بازاء} ۶۹ \\ \text{هـ} = ۳۲۰,۹۰۵ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{لحـ} = ۲,۷۳۵,۰۱۵,۷ \\ \text{لحـ} = ۹,۷۷۱,۲۶۰,۹ \end{array}$$

$$۱۲,۵۰۶,۳۷۶,۶$$

$$\text{لـ هـ} = ۲,۵۰۶,۳۷۶,۶$$

$$\text{هـ} = ۳۲۰,۹۰۵$$

بس مقداره د و ه هر سه معلوم شد

بقیة چون ترکیب کنیم صابی را که باید در تعیین مقدار د جوی داشت با حساب بسط
بمقدار ه اعمال بسیار مختصر میشود و بر محاسب لازمست که از این نکات آگاه شود مثلاً

مثلاث

لك ۲ چون در هر دو استعمال میشود همانند كم از جدول برگزینیم در هر دو موضع بنویسیم
و همچنین لك حب ۲ و لك حب ۲ چون در یک صف جدول واقع میشوند در هر دو
یک مرتبه طلب نموده در محل خود جای بنویسیم و ایند برای یک قوس و مرتبه در جدول جای بنویسیم
۷۳ مفاتیح مسئله در مثلث قائم الزاویه د = ۳۶۸۳۶۸ و ه = ۴۲۱۶۸۱

و مطلوب سائر اجزاست

جواب مجهولات

مطلوبات

$$\begin{aligned} \text{د} &= ۳۶۸۳۶۸ \\ \text{ه} &= ۴۲۱۶۸۱ \\ \text{و} &= ۹۱۸۱۹ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د} &= ۳۶۸۳۶۸ \\ \text{ه} &= ۴۲۱۶۸۱ \end{aligned}$$

دستورات د = ه ظل یا اگر ظل = د و لك ظل = لك د لك

$$\text{و } ۹۰ - ۱ = ۸۹$$

$$\text{د} = \text{س} \text{ پس لك} = \text{لك د} + \text{لك حب} = ۱۰$$

و چون د اطولت از ه زاویه عظم است از ه ۴ و در صورت اضافه عدد

۱۰ بر لك ظل بنیافته است چونكه باید بهمانم از انفریق نمود

در استخراج مقدار

تفصیل اعمال

اول در تعیین لك د

$$\text{لك د} = ۳۶۸۳۶۸ \text{ و } ۷ = ۳۹۰۵۷۳$$

$$\text{لك د} = ۳۶۸۳۶۸ \text{ و } ۷ = ۳۹۰۵۷۳$$

و ایند برای تعیین مقدار از روی لك ظل

$$\text{لك ظل} = ۱۱۳۹۹۲۵ \text{ (شبه ۴۳۵)}$$

$$\text{بازاء } ۱۱۳۹۹۲۵ \text{ و } ۲۶ = ۵۲$$

$$\text{بازاء } ۱۸۹۰ \text{ و } ۱۵۰ = ۱$$

$$\text{بازاء } ۱۸۹۰ \text{ و } ۱۵۰ = ۱$$

$$\text{لك د} = ۳۶۸۳۶۸$$

$$\text{لك ه} = ۴۲۱۶۸۱$$

$$\text{لك ظل} = ۱۱۳۹۹۲۵$$

$$\text{د} = ۳۶۸۳۶۸$$

در تعیین مقدار

$$\text{د} = ۳۶۸۳۶۸$$

$$\text{ه} = ۴۲۱۶۸۱$$

$$\text{و} = ۹۱۸۱۹$$

در استخراج مقدار

تفصیل اعمال	لک د = ۲۱۲۳۹۰۷۸۵
اول در تعیین لک ح	منع لک ح = ۱۰۵۹۱۴۱
لک ح = ۵۲۲۴۰۷۸۴ = ۹۸۹۹۰۷۸۴	۲۸۳۹۹۹۲۶
پاراء ۴	لک ح = ۲۸۳۹۹۹۲۶
پاراء ۵	۶۹۱۸۱۹ = ۲
پاراء ۱۵	
لک ح = ۵۲۲۴۰۷۸۴ = ۹۸۹۹۰۷۸۴	
در تعیین در تعیین از روی لک ح	
لک ح = ۲۸۳۹۹۹۲۶	
پاراء ۲۸۳۹۹۹۸۶۸	
۶۹۱۸۱۹	
۹	
۵۸	
۶۹۱۸۱۹ = ح	

پس مقادیر د و ه بدست آمد

در جدول مثلثات غیر قائمه الزامی و آن نیز بر چهار حالت است
بنقدار در حالت اول یک ضلع و دو زاویه معلومست و مطلوب باشد

سایر اجزای وسط مثلث

مثلث د و ه معلوم فرض شده و مجهولات ح است و د و ه

$$\text{چون } ۱۸۰^\circ = ۵ + ۴ + ۳ = ۱۸۰^\circ - (۵ + ۴)$$

و بقدر معلوم نمودن ح باید د و ه را مشخص نمود

$$\frac{د}{۲} = \frac{\text{ح ح د}}{\text{ح ح د}} \text{ پس د} = \frac{\text{ح ح د}}{\text{ح ح د}} \text{ و بکار تیم}$$

$$\text{لک د} = \text{لک د} + \text{لک ح د} - \text{لک ح د} (۷)$$

$$\text{و لهذا } \frac{ه}{۲} = \frac{\text{ح ح ه}}{\text{ح ح ه}} \text{ پس ه} = \frac{\text{ح ح ه}}{\text{ح ح ه}}$$

و بکار تیم لک ه = لک د + لک ح د - لک ح د (لک)

بقیتم دو دستور (۷) و (لک) را باید از روی جدول مثلثاتی حل نمود و بی آنکه در

آنکه تشریف بشود چه که باز آید + لک جیب ۱ باید ۱ واحد تشریف نمود و باز آید - لک
حسب ۱ باید ۱ واحد اضاف کرد و این دو عمل متکافیه شوند و اجزای یکدیگر لازم نیست
و هرگاه بجواییم بقاعده متمم عددی پیش رویم دو دستور (ب) و (ل) را بدل کنیم بن دو دستور

$$\text{لک د} = \text{لک ح} + \text{لک حسب ۱} + \text{مع لک حسب ۱۰}$$

$$\text{لک ه} = \text{لک ۲} + \text{لک حسب ۱} + \text{مع لک حسب ۱۰}$$

و اما قاعده مساحت سطح مثلث - در اصول بنده مبرهن گشته است که

$$\text{سطح ۱} = \frac{1}{2} \times \text{لک د} = \frac{1}{2} \times ۱۰ \times \text{ه} = ۵ \times \text{ه}$$

$$\text{و چون ۱۰} = ۲ \times \text{حسب ۱ پس سطح ۱} = \frac{1}{2} \times \text{ه} = ۵ \times \text{حسب ۱}$$

و این دستور را در مساحت سطح مثلث وقتی استعمال کنیم مقدار استخراج شده باشد
ولیکن اگر معلوم نباشد و بجواییم بلا واسطه سطح مثلث را معلوم کنیم باید دستور دیگر
استعمال نمود و حال مقصود استخراج است پس از تساوی

$$\frac{\text{ه}}{۲} = \frac{\text{حسب ۱}}{\text{حسب ۲}} \text{ این تساوی استنباط میشود } \frac{\text{ه}}{۲} = \frac{\text{حسب ۱}}{\text{حسب ۲}}$$

و این مقدار را در دستور یک برای سطح معلوم نمودیم قرار میدسیم

$$\text{سطح ۱} = ۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} \times \frac{\text{حسب ۱}}{\text{حسب ۲}}$$

$$\text{یا آنکه } ۲ \times \text{سطح ۱} = ۵ \times \frac{\text{حسب ۱}}{\text{حسب ۲}}$$

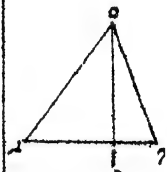
و حال موافق قاعده ۴ این دستور را بلکار میگیریم

$$\text{لک ۲ سطح ۱} = ۵ \times ۲ = \text{لک ۲} + \text{لک حسب ۱} + \text{لک حسب ۱۰} = \text{لک حسب ۱۰} + ۲۰$$

$$\text{یا آنکه لک ۲ سطح ۱} = ۵ \times ۲ = \text{لک ۲} + \text{لک حسب ۱} + \text{لک حسب ۱۰} + \text{مع لک حسب ۲۰}$$

و بعد از آنکه مضاعف مساحت سطح مثلث بدست آمد از برابر ۲ قسمت میکنیم و این عمل بر آن

آنکه لک ۱ را بر ۲ عدد ۳ را در حساب آوریم



هفتای ششم - پیشه در همین حالتیم ممکن است که عوض خود ۲ و ۱ لک را تیسرا معلوم باشد که در صورتی چون بجاییم دستور (ب) را بعینه استعمال کنیم میباید اول در جدول داخل شده مقدار ۲ و ۱ را معلوم سازیم و بعد مقدار ۲ و ۱ مقدار ۲ + ۱ را و آنوقت لک را تیسرا هر کدام را از جدول بگیریم و حال آنکه ممکن است بجز جنس را نیز دستور را بدل کنیم بدستوری مختصر تر را بنظر

صورت و محزج جزء دوم مساوات را بر ۲ قیمت میکنیم چنین میشود

$$\text{ظل } \frac{1}{3} = (۷-۸) = \frac{۱-۲}{۳} \cdot \text{ظل } \frac{۲}{۳}$$

و فرض میکنیم $\frac{۲}{۳} = \text{ظل } (ف)$ (ف زاویه است مجهول) یا آنکه لک ظل ف = لک د - لک ۱۰ + ۲ (ل) و زاویه ف را از نزوی معلوم میکنیم و در مساوات فوق عرض $\frac{۲}{۳}$ این جمله را (ظل ف) قرار میدسیم چنین میشود

$$\text{ظل } \frac{۲-۳}{۳} = \frac{۱-ظل ف}{۱+ظل ف} \cdot \text{ظل } \frac{۲}{۳} = \frac{ظل ۴-ظل ف}{۱+ظل ۴ظل ف} \cdot \text{ظل } \frac{۲}{۳}$$

یا آنکه $\text{ظل } \frac{۲}{۳} = (۷-۸) = \text{ظل } (۴-۵) \cdot \text{ظل } \frac{۲}{۳} \quad (ل)$

و حال چون دستور (ل) و (ل) را استعمال کنیم مثل از دوم مرتبه نباید در جدول وارد شویم و حال آنکه دستور (ب) چهار نوبت در جدول داخل میشویم

هفتای هفتم حالت سیم آنست که دو ضلع و زاویه مقابل یکی از آنها معلوم باشد و بجاییم سائر اجزا استخراج کنیم مثلاً معلومات ۲ است و دو دو و مطلوبیات دو زاویه د و ه و ضلع هر زاویه د از روی این مساوات معلوم شود

$$\frac{\text{حب } ۲}{\text{حب } ۳} = \frac{۲}{۳} \quad \text{یا} \quad \text{حب } ۲ = \frac{\text{حب } ۳}{۲} \quad (۱)$$

$$\text{و زاویه ه از این مساوات } ۱۸۰ - (۲ + ۳) = ۵ \quad (۲)$$

$$\text{و ضلع ه از این مساوات } \frac{\text{حب } ۲}{\text{حب } ۳} = \frac{۲}{۳} \quad (۳)$$

تحقق چون مقدار حب از روی مساوات (۱) استخراج می شود اگر $\frac{د}{ح}$ دحب

یا آنکه $لک د + لک ح = لک ۱۵$ و ماورجدول داخل شویم مقدار

در اکثر از ۹۰ می آیم و آنرا $م$ فرض میکنیم $م > ۹۰$ و کمل $م$ یعنی $۱۸۰ - م = م'$

نیز صاحب جیب $م$ است و درین صورت باز جیب $م$ و قوس $م$ است یا یکسان

حال بجای $م$ قوس $م$ و $م$ را در مساوات (۲) قرار دسیم این مساوات تغییر می

شود $۱۸۰ - (۱۸۰ - م) + (۱۸۰ - م) = ۱۸۰ - (۱۸۰ - م) + (۱۸۰ - م)$ و از خارج میزدیم که مقدار $۱۸۰ - م$

مثبت باشد پس لازم آید که دو قوس $م$ و $م$ در این مساوات صدق کنند

$۱۸۰ - م + ۱۸۰ - م = ۱۸۰$ و درین صورت جیب قوس $۱۸۰ - م$ و جیب قوس $م$

مثبت می شوند و چون هر دو را در مساوات (۳) قرار دسیم ضلع هر صاحب دو

مثبت می شود یکی $ه = \frac{ح}{ح}$ و دیگر $ه = \frac{ح}{ح}$

پس شرط تحقق مسئله همین شد که $۱۸۰ - م + ۱۸۰ - م > ۱۸۰$

حال مقصود آنکه بدانیم خصوصیات مسئله چه باشد تا تحقق شرط مذکور ممکن شود

پس $م$ و $۱۸۰ - م$ اگر زاویه فروضه منفرد باشد یا قائمه لابد

$۱۸۰ - م > ۱۸۰$ میشود

و بنابراین باید از جواب ثانی $م$ چشم پوشیم چونکه بزرگتر می شود از ۹۰

و اما جواب اول $م$ مناسب نباشد جز در صورتیکه $۱۸۰ - م + ۱۸۰ - م > ۱۸۰$

یعنی $ح + ح > ح$ یا آنکه $\frac{ح}{ح} > ح$ و لهذا $ح > ۱$

پس معلوم شد که اگر زاویه فروضه منفرد باشد یا قائمه مسئله

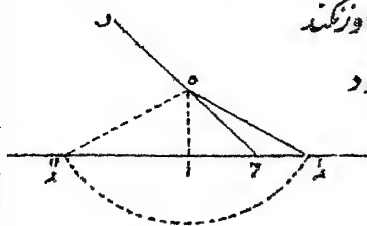
این جواب قبول نکند و انهم درین صورت که ضلع مقابل زاویه فروضه

اعظم باشد از ضلعی که مجاور است به همان زاویه

باب دوم

۶۶

خط δ را بر دو نقطه δ و δ' قطع میکند و ممکن است که نقطه δ و δ' در سمت دیگر δ افتد و در این صورت با مسئله موافق نیاید و جواب محسوب نشود و باید هر دو بر روی خود خط δ واقع شوند بر امتداد δ و عدد جواب برابر است با عدد نقاط فصول که بر خود خط δ واقع شوند و آن هر که از دو تجاوز نکند



پس اگر زاویه δ منفرد باشد نقطه δ واقع شود

بر امتداد δ یعنی در سمت دیگر δ

و همچنین نقطه δ' و لهذا این نقطه باشد

موافق نیاید و اما اگر $\delta < \delta'$ و بنابراین $\delta < \delta'$ یعنی $\delta < \delta'$ جواب

مستدام و الا نه

و اگر زاویه δ قائمه باشد فاصله دو نقطه δ و δ' از نقطه δ برابر است و در مثلث

δ و δ' و δ'' متساوی میگردند و مسئله صاحب یک جواب میشود آنهم در صورتیکه $\delta < \delta'$

و الا هیچ جواب قبول نمیکند

و اگر زاویه δ حاده باشد (س) نقطه δ بر δ واقع میشود و مثلث δ و δ'

جواب مسئله میشود و اما نقطه δ' در صورتی بر δ واقع شود و مسئله متوقف است که اگر $\delta < \delta'$

و با بجز اگر $\delta = 1$ یا $\delta = 2$ دایره تماس میکند خط δ را بر نقطه

۱ و مسئله صاحب یک جواب میشود اگر زاویه δ حاده باشد و الا در صورتیکه منفرجه

باشد یا قائمه هیچ جواب ندارد

هنگامی که در حالت سیم دو زاویه مجهول δ و δ' را اول استخراج نمودیم و بعد

ضلع هر را از روی آنها معلوم ساختیم و ممکن است که آنرا بدو واسطه از روی خود

۲ و ۳ و ۴ مشخص کنیم زیرا که از تساوی

۷۸

نکته

چون ه را مجهول
رض کنیم معادله
درجه دوم شود
جواب آن خواهد
بود و معادله استخراج

$2^2 = د^2 + ه^2 - ۲ د ه \cos ۲۰$
 این استوی $۲ - ۲ د ه \cos ۲۰ = ۵۰ - ۲ د$ استیسا شود و بعد از آن
 این جواب $ه = د \cos ۲۰ \pm \sqrt{۲ د + ۲۰ (۲ - د)}$
 یا این جواب $ه = د \cos ۲۰ \pm \sqrt{۲ د - ۲۰ د}$ حساب
 چون هر دو مقدار ضلع ه باید حقیقی و مثبت باشند لازم آید که ۲۰ اقل مساوی
 با ۲ حساب و عبارت آخری $\frac{د \cos ۲۰}{۲}$ و $\frac{د \cos ۲۰}{۲} = ۱$
 پس اگر فرض کنیم $\frac{د \cos ۲۰}{۲} = ۱$ هر دو مقدار ه حقیقی میشوند و مختلف و درین صورت
 باید معلوم کنیم که در کدام حالت مثبت میشوند پس کوئیم
 اگر $۲۰ < ۹۰$ جیب تمش منفی است و آنوقت باید ریشه را با علامت + اختیار
 کنیم و نیز باید این نامساوات محقق باشد $د \cos ۲۰ + \sqrt{۲ د - ۲۰ د} > ۰$
 و بنا بر این $\sqrt{۲ د - ۲۰ د} > - د \cos ۲۰$
 و بعد از آن $۲ - د \cos ۲۰ > ۲ د \cos ۲۰$
 و $۲ < ۲ د \cos ۲۰$
 و اگر $۲۰ = ۹۰$ این چند مساوات حاصل میشود $د \cos ۲۰ = ۰$ و $۰ > ۱$
 و $ه = \sqrt{۲ د - ۲۰ د}$ و لهذا $۲ < د$
 و اگر $۲۰ > ۹۰$ لازم آید که $د \cos ۲۰ < ۰$ و حاصل اینجا
 $د \cos ۲۰ + \sqrt{۲ د - ۲۰ د} > ۰$ موافق باشد باینکه
 و اما جواب ثانی $د \cos ۲۰ - \sqrt{۲ د - ۲۰ د} > ۰$ اگر خواهیم مناسب باشد
 باید $\sqrt{۲ د - ۲۰ د} > د \cos ۲۰$ و لهذا
 $۲ - د \cos ۲۰ > ۲ د \cos ۲۰$ یا آنکه $۲ < د (۱ + \cos ۲۰)$

و آنوقت ۲ > ۱

پس در تحقق مقدار ضلع هر جمیع حالات و شروطی را که سابق ثابت نموده بودیم باز می بینیم
خلاصه نموده تا حاصل آنکه هرگاه زاویه مفروضه داده باشد و ۱ > ۲ (در مثلثات)
دو جواب میشود و اگر ۱ < ۲ صاحب یک جواب و اگر زاویه مفروضه منفرجه باشد
یا قائمه و ۱ < ۲ در مسئله صاحب یک جواب میشود و الا هیچ جواب ندارد
همچنانکه در نمره سابق که خواستیم مقدار هر را بواسطه استخراج کنیم این دستور را قرار دادیم

۷۹

$$h = d \cos C \pm \sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2}$$

و چون در این دستور دو جمله برعکس ثانی بعد از امت \pm بهم بود کشته اند بتوانیم عدد کاریم را
در آن جاری ساخت پس بهتر است که بتدریج از یک جمله تحویل کنیم
و اول تصرف جنس را بر این بناوی حاصل شود

$$h = d \cos C \pm \sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2} \quad (1)$$

و چون حاصل ریشه یا حقیقی باشد یا $\sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2}$ البته کوچکتر است از واحد پس ممکنیم

$$\frac{d \sin C}{2} = \text{حب ف (ف زاویه است غیر معین)} \quad \text{و آنوقت}$$

$$\sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2} = \sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2} = \text{حب ف}$$

و از مساوات حب ف = $\frac{d \sin C}{2}$ این مساوات نتیجه شود $\frac{d \sin C}{2} = \text{حب ف}$

حال در مساوات (۱) بجای $\sqrt{d^2 \sin^2 C - c^2}$ و بجای $\frac{d \sin C}{2}$ در معادله هر کلمه را قرار می دهیم

$$\text{این بناوی نتیجه میشود } h = \frac{d \cos C}{2} \pm \frac{d \sin C}{2}$$

$$= \frac{d \cos C \pm d \sin C}{2}$$

$$یا این بناوی ه = \frac{d \cos (ف \pm ۹۰)}{2}$$

و ظاهر است که دستور اخیر را بتوان بقانون کار تیمر حل نمود

مُثَلَّثَات

بقینہر باید دانست کہ دو مقدار زاویہ ف کہ از روی این مساوات جب ف = $\frac{1}{2}$ دجیم

استخراج میشود یعنی دو مقدار از رویه به ازای شش مطلوب اند زیرا که $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ دج

پس معلوم شود که اند و مقدره و خداست و هر دو ممکن میگردند و حال چون در خصوص

۵ = $\frac{2 \pm f}{\text{حاج}}$ و سرف را بدل کنیم به μ و μ را بر σ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{2 \text{ حب } (7 \pm 1)}{7 \text{ حب}} = 2 \text{ و } \frac{2 \text{ حب } (7 \pm 1)}{7 \text{ حب}} = 2$$

ولیکن حب (۱-۲) = حب (۲+۳) زیرا کہ مجموعہ دوزاویہ (۱-۲-۳)

و $(x + \frac{1}{2})$ معادلت با 180° او کذا محجب $(x - \frac{1}{2}) = \text{حب}$ $(x + \frac{1}{2})$

بنابر این شلّه صاحب و جواب مختلف است نه چهار جواب و اندو جواب نیست

$$\frac{2 \text{ حب } (7+6)}{7 \text{ حب}} = 2 \text{ حب } (7+6) \text{ حب } 7 \text{ حب} = 2 \text{ حب } (7+6) \text{ حب } 7 \text{ حب}$$

چون مثل دوزاویه $(\alpha + \beta)$ و $(\alpha + \gamma)$ را بگیریم و مقدار α و β

زاویه ه از مثلث مطلوب حاصل آید پس

$$\frac{0 \text{ حب } 2}{0 \text{ حب } 2} = 0 \text{ و } \frac{0 \text{ حب } 2}{0 \text{ حب } 2} = 0$$

معلوم شد که چون بوجه ثانی رفتار کنیم جواب را از روی زاویه وسط و استخراج

از این اختلاف نیز در جواب اول که از روی دوزاویه معلوم نمودیم

شماره - حالت ارم است که در ضلع ۲ و ۳ و ۴ معلوم باشد

خواهیم سناوید و و و و استخراج کنیم

بق در مع ثابت کردیم که $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ حجم

$$r_2 - r_3 + r_4 = 7 \text{ cm}$$

$$\frac{r_2 - 1 + r_2}{2} = 7$$

این مساوات جمیع جمله‌های جزو ثانی معلومست ولیکن از برابرگاری هم حاصل نمود

در ۲ ثابت کرده ایم که $۲ \text{ حسب } ۲ = ۱ - ح$

$$= \frac{۲ - ۲ + ۲ - ۲}{۲} = \frac{۲ - ۲ + ۲ - ۲}{۲} = \frac{۲(۱ - ح) - ۲}{۲} = \frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} = \frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} =$$

و حال چون مانند سابق فرض کنیم $۲ = ح + د + ۲$ ط بیج و مساوات حاصل شود

$$۲ = ح + د + ۲ \quad \text{و} \quad ۲ = ح + د + ۲ \quad \text{و} \quad ۲ = ح + د + ۲$$

و بعد $۲ \text{ حسب } ۲ = \frac{۲(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} = \frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲}$

و $۲ \text{ حسب } ۲ = \frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} = \frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲}$ و بکذا

(۲) $\left[\frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} \right] \sqrt{۲} = \frac{۲}{۲} \text{ حسب } ۲ = \frac{۲}{۲} \text{ حسب } ۲$

و حال چون دستور (۲) را بر (۱) قیمت کنیم چنین میشود

(۳) $\frac{(۱ - ح)(۲ - ۲)}{۲} \sqrt{۲} = \frac{۲}{۲} \text{ حسب } ۲ = \frac{۲}{۲} \text{ حسب } ۲$

و بکذا دو مساوات دیگر و چون برای استعمال جدول مثلثاتی قواعد لگاریتم را در آن جاری کنیم چنین میشود

لگ $\frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} (\text{لگ } ۲ - \text{لگ } (۱ - ح) + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲)$

و آن باین صورت متبدل شود

لگ $\frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} (\text{لگ } ۲ - \text{لگ } (۱ - ح) + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲)$

و هكذا لگ $\frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} (\text{لگ } ۲ - \text{لگ } (۱ - ح) + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲)$

لگ $\frac{۲}{۲} = \frac{۱}{۲} (\text{لگ } ۲ - \text{لگ } (۱ - ح) + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲ + \text{لگ } ۲)$

و اریشمار با علامات + نوشته شود و یکدوم از زوایای کمره آن ۱۸۰ و لهذا اضفین کمتر

باب نهم

۲

از ۹۰ و بر کار تیم هر ظل ۱۰ واحد اضافی کردیم پس اگر آنوقت حاصل از ۱۰ بجای و زنگنه معلوم میشود که نصف زاویه مطلوب از ۵۴ بجای و زنگنه و درینصورت باید قبل از خود در جدول انده را تغییرق نمود

بقیص هرگاه در این مسئله یکی از زوایای مثلث مثلث شما مطلوب باشد از روی هر کدام از دستورات (۱) و (۲) و (۳) که خواهم از استخراج کنیم طلب چهار کار تیم لازم شود و درینصورت همچکدام از این دستورات را بر دیگر حجاب نیست ولیکن اگر تیم زاویه مطلوب باشد آنوقت استعمال دستور (۳) اولیت چرا که برای همه آنها طلب کار تیمهای چهار جمله ط و (ط-۲) و (ط-د) و (ط-ه) بی تفاوت لازم و کافی باشد و حال آنکه اگر خواهم از روی دستور (۲) مسئله را حل کنیم بایش کار تیم طلب کنیم و از روی دستور (۱) هفت کار تیم

۸۱ هشتاد و یکم در مساحت سطح مثلث در ۷ ذکر شد که سطح ۰۴ = ۲۰ ×

و حسب ۰ = ۲ حسب $\frac{0}{2}$ هم $\frac{0}{2}$ × حسب ۰۴
و چون مقدار حسب $\frac{0}{2}$ و هم $\frac{0}{2}$ را بجنب ضلع استخراج نموده ایم اینا و ات

$$\begin{aligned} \text{حسب } 0 = 2 \text{ حسب } \frac{0}{2} \text{ هم } \frac{0}{2} &= \frac{2 \sqrt{\frac{(ط-2)(ط-د)}{2}}}{\frac{(ط-2)(ط-د)(ط-ه)}{2}} \\ \times \sqrt{\frac{(ط-2)(ط-د)(ط-ه)}{2}} &= 2 \sqrt{\frac{(ط-2)(ط-د)(ط-ه)}{2}} \\ \text{و آنوقت سطح } 0.4 &= \sqrt{(ط-2)(ط-د)(ط-ه)} \end{aligned}$$

و این دستور را بکار تیم میتوان حل نمود

و حال چند مثالی در خصوص حالات مذکوره ذکر کنیم
۸۲ هشتاد و دو حالت اول معلومات مسئله یک ضلع است و دوزاویه

جواب مجهولات

$$۷ = ۳' ۳' ۳' ۳'$$

$$۷ = ۶' ۸' ۶' ۶'$$

$$۷ = ۵' ۴' ۵' ۴'$$

$$۷ = ۵' ۶' ۵' ۶'$$

معلومات

$$۷ = ۲' ۲' ۲' ۲'$$

$$۷ = ۳' ۱' ۳' ۱'$$

$$۷ = ۴' ۱' ۴' ۱'$$

تنبیه
مع علامت ضرب
مربع است

در تعیین زاویه

$$۷ = ۱۸' - (۵ + ۴)$$

$$۱۸' = ۵' ۶' ۵' ۶'$$

$$۱۱' ۶' ۱۱' ۶' = ۵ + ۴$$

$$۷ = ۳' ۳' ۳' ۳'$$

در استخراج مقدار

$$۷ = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۷$$

$$۷ = ۲' + ۲' + ۲' + ۲' = ۸'$$

تفصیل اعداد

در تعیین لك

$$۷ = ۱۲' ۲' ۱۲' ۲'$$

در تعیین لك

$$۱۸' = ۵' ۶' ۵' ۶'$$

$$۷ = ۳' ۱' ۳' ۱'$$

$$۱۸' = ۵' ۶' ۵' ۶'$$

$$۷ = ۱۲' ۲' ۱۲' ۲' = ۱۲' ۲' ۱۲' ۲'$$

$$۷ = ۳' ۱' ۳' ۱'$$

$$۷ = ۲' ۲' ۲' ۲'$$

$$۷ = ۳' ۱' ۳' ۱'$$

$$۷ = ۴' ۱' ۴' ۱'$$

$$۱۲' ۲' ۱۲' ۲'$$

$$۷ = ۳' ۱' ۳' ۱'$$

$$۷ = ۴' ۱' ۴' ۱'$$

$$۷ = ۱۲' ۲' ۱۲' ۲' = ۱۲' ۲' ۱۲' ۲'$$

بایست قر

در تعین مع الحساب

$$۳ = ۵۳' ۳۳' ۳۰$$

$$\text{الحساب} = ۵۳' ۳۳' ۳۰ = ۹,۹۵۲,۳۲۳ \text{ (تقریباً ۱۰۵)}$$

۳۱۵

۳

$$\text{الحساب} = ۵۳' ۳۳' ۵۴ = ۹,۹۵۲,۳۵۴$$

$$\text{مع الحساب} = ۳۰۴۷۹۶۴۶$$

در تعین دارو لک

$$\text{لک} = ۲,۹۵۵,۲۹۴,۴$$

$$\text{بازاء} = ۲,۹۵۵,۲۹۵,۶$$

۷

۳۸

$$۷۹۴,۸۶۷ = ۵$$

در استخراج مع

$$\text{دستور حساب} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}} = ۵ = \frac{\text{ح}}{\text{ح}}$$

$$\text{لک} = \text{لح} + \text{الحساب} + \text{مع الحساب} = ۱۰$$

تفصیل احوال

در تعین الحساب

$$\text{الحساب} = ۱۹' ۲۴' = ۹,۱۶۶,۶۴۷ \text{ (تقریباً ۱۰۵)}$$

۱۸۶,۴

۳

$$\text{الحساب} = ۱۹' ۲۴' = ۹,۱۶۶,۸۳۳$$

$$\text{لح} = ۲,۸۵۲,۶۲۶,۴$$

$$\text{الحساب} = ۹,۱۶۶,۸۳۳$$

$$\text{مع الحساب} = ۳۰۴۷۹۶۴۶$$

$$۱۲,۵۱۵,۲۷۴,۳$$

در تعین دارو لک

$$\text{لک} = ۲,۵۱۵,۲۷۴,۳$$

$$\text{بازاء} = ۲,۵۱۵,۲۶۴,۳$$

۷

۱۰۰

بازاء

$$۳۲۷,۵۴۷ = ۳$$

$$\text{لک} = ۲,۵۱۵,۲۷۴,۳$$

$$۳۲۷,۵۴۷ = ۳$$

مُثَلَّثَات

۷۵

در یقین مباحث

دستور ۲ سطح = $\frac{۲}{۳}$ حب ۲ حب ۱ حب ۰

لك ۲ سطح ۲ = لك ۲ + لك حب ۱ + لك حب ۰ + مع لك حب ۰

در یقین ۲ سطح از روی لك ۲ سطح

لك ۲ سطح = ۵,۳۶۷,۶۰۴,۱
! زاء ۳۶۷,۶۰۴,۱
۲۳۳۱۳

۴۱ ۵۹
۲۳۳۱۳۴۱ = سطح ۲

۱۱۶۵۶۱ = سطح

۲ لك ۲ = ۵,۷۰۵,۲۵,۲۱

لك حب ۰ = ۹,۹۹۹,۷۰,۳۴

لك حب ۱ = ۹,۶۱۴,۶۱,۳۳

مع لك حب ۲ = ۵,۰۴۷,۹۶,۴۶

۲۵,۳۶۷,۶۰۴,۱

لك ۲ سطح = ۵,۳۶۷,۶۰۴,۱

۲ سطح = ۲۳۳۱۳۴۱

سطح = ۱۱۶۵۶۱

۱۳ پُشْتَانِ سَمِیْ حَالِکِ یَمِیْ هَکَلَوْنَا مَسْئَلَهُ دِیْضِلِیْ اَنْتَ فَرَاوِیْ نِیْمَا

جواب مجهولات

۴۶ ۲۴ ۱۳ ۱ = ۱

۳۲ ۳۲ ۲۱ ۲ = ۰

۱۶۴ ۵۲۱ = ۲

۶۱۲۱۶۴ = سطح ۱

معلومات

۱۳۰ ۴۲ = د

۹۵ ۳۵ = ه

۱۰۰ ۵۱ = ز

در استخراج دست ۱ و ۰

دستور ۰ - ۱۱۰° = ۰ + ۱

$\frac{۲}{۳}$ - ۹۰° = $\frac{۰+۱}{۲}$

۱۹° ۵۹' ۶" = ۹۰°

۵۰° ۲' ۳۹" = $\frac{۲}{۳}$

۳۹° ۵۷' ۲۱" = (۰ + ۱) $\frac{۱}{۳}$

باب دوم

۷۶

درتین $\frac{1}{4}$ (۰-۴)

$$\text{دستور ظل } \frac{1}{4} (۰-۴) = \frac{(د-ه) \text{ ظل } \frac{1}{4} (۰+۴)}{د+ه}$$

$$\text{لك ظل } \frac{1}{4} (۰-۴) = \text{لك (د-ه)} + \text{لك ظل } \frac{1}{4} (۰+۴) + \text{مع لك (د+ه)} - ۱۰$$

تفصیل الخال

درتین متمم لکارتیم (د+ه) و لك (د-ه)

$$۱۳-۲۲ = د$$

$$۹۵۲۵ = ه$$

$$۲۲هـ ۷۷ = د+ه$$

$$۳۵هـ ۰۷ = د-ه$$

$$\text{لك (د+ه)} = ۲۳۵۳۶۶۶۲$$

$$\text{مع لك (د+ه)} = ۶۶۶۶۳۳۳۸$$

$$\text{لك (د-ه)} = ۱۵۴۴۹۳۵۱$$

درتین لک ظل $\frac{1}{4}$ (۰+۴)

$$\frac{1}{4} (۰+۴) = ۳۹^{\circ} ۵۷' ۲۱''$$

$$\text{لک ظل } ۳۹^{\circ} ۵۷' ۲۰'' = ۹۹۲۳۱۲۹۳ \text{ (تقل ۴۲۱)}$$

$$\text{بزا ۴۳}$$

$$\text{لک ظل } ۳۹^{\circ} ۵۷' ۲۱'' = ۹۹۲۳۱۲۳۶$$

درتین $\frac{1}{4}$ (۰-۴) از روی لک ظل ان

$$\text{لک ظل } \frac{1}{4} (۰-۴) = ۹۹۱۴۴۰۳۲ \text{ (تقل ۴۱۶)}$$

$$\text{بزا ۷۲} \quad ۹۹۱۴۳۵۶۸ \quad ۷۲^{\circ} ۴۵''$$

$$۴۴۰$$

$$۱۳۴۸۰$$

$$\frac{۷۲^{\circ} ۴۵''}{۶۸} = \frac{1}{4} (۰-۴)$$

$$\text{لك (د-ه)} = ۱۵۴۴۹۳۵۱$$

$$\text{لک ظل } \frac{1}{4} (۰+۴) = ۹۹۲۳۱۳۳۶$$

$$\text{مع لك (د+ه)} = ۶۶۶۶۳۳۳۸$$

$$۱۹۱۱۴۴۰۳۲$$

$$\text{لك ظل } \frac{1}{4} (۰-۴) = ۹۹۱۴۴۰۳۲$$

$$\frac{1}{4} (۰+۴) = ۳۹^{\circ} ۵۷' ۲۱''$$

$$\frac{1}{4} (۰-۴) = ۷۲^{\circ} ۴۵''$$

$$۴۷^{\circ} ۲۲' ۱۳'' = د$$

$$۳۲^{\circ} ۳۲' ۲۹'' = ه$$

کراستی طرح ضلع ۲

$$\frac{\text{مستور ح}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}} = ۱ \text{ و } \frac{\text{ح}}{\text{ح}} = ۱$$

$$۱۰۰ = \text{لک ه} + \text{لک ح} + \text{مع لک ح} - ۱۰۰$$

تقصیل اعمال

دریقین لک ح

$$\text{ح} = \text{ح} (۱۸۰ - ۷)$$

$$۱۷۹^{\circ} ۵۹' ۶'' = ۱۸۰^{\circ}$$

$$۱۵۰^{\circ} ۵' ۱۸'' = ۷$$

$$۱۸۰^{\circ} - ۷^{\circ} ۵۴' ۴۳'' = ۱۷۹^{\circ} ۵۹' ۱۷''$$

$$\text{لک ح} ۷۹^{\circ} ۵۹' ۱۷'' = ۱۷۹۳۲۳۲۱ \text{ (مقل ۳۱)}$$

$$\text{لک ح} ۷۹^{\circ} ۵۴' ۴۳'' = ۱۷۹۳۲۳۲۹$$

دو یقین منع لک ح

$$۳۲^{\circ} ۳۲' ۲۸'' = ۵$$

$$\text{لک ح} ۳۲^{\circ} ۳۲' ۲۸'' = ۱۷۳۵۶۷۸۹ \text{ (مقل ۳۳)}$$

$$۲۶۴۵$$

$$۶۶$$

$$\text{لک ح} ۳۲^{\circ} ۳۲' ۲۸'' = ۱۷۳۵۶۷۸۹$$

$$\text{مع لک ح} ۵ = ۱۷۳۵۶۷۸۹$$

دریقین ح از دو لک و یقین

$$\text{لک ح} = ۱۷۳۵۶۷۸۹$$

$$۱۷۳۵۲ \quad ۲۴۱۸۴۵۲$$

$$۱ \quad ۲۴$$

$$۱۷۳۵۲۱$$

$$\text{ح} = ۱۷۳۵۲۱$$

$$\text{لک ه} = ۱۷۹۳۲۳۲۰۷$$

$$\text{لک ح} = ۱۷۹۳۲۳۲۲۹$$

$$\text{مع لک ح} = ۱۷۳۵۶۷۸۹$$

$$۱۷۳۵۶۷۸۹$$

$$\text{لک ح} = ۱۷۳۵۶۷۸۹$$

$$\text{ح} = ۱۷۳۵۲۱$$

باب دوم

۷۸

در تعیین مساحت مثلث

دستور ۲ سطح = ده حب + ول ۲ سطح = لک + د + لک + ده حب + لک - ۱۰

در تعیین ۲ سطح از روی کاتریش

لک ۲ سطح = ۱۳۰ ۱۷۱۹۷۸

۱۲۲۴۳ ۰ ۵۱۷۸۱۷۸

	۱۰۵	بازاء
۲	۷۱	بازاء
۱	۲۹	بازاء
<hr/>		
۱۲۲۴۳۲۸	۱۲۲۴۳۲۸ = سطح ۲	

لک د = ۲۱۱۵۳۴۴۲

لک ه = ۱۹۷۹۳۲۵۷

لک ح = ۹۹۹۳۲۲۹

۱۱۵۵۸۷۸۹۷۸

لک ۲ سطح = ۳۶۸۷۸۹۷۸

سطح ۲ = ۱۲۲۴۳۲۸

سطح = ۶۱۲۱۶۴

۱۴ هشتاد و هشت معلوما مسئله و ضلع و زاویه مقابل یکدیگر از آنجا که دو دایره ۷

جواب مجهولات

معلومات

$\left. \begin{aligned} ۷۵^\circ ۳۹' ۴۰'' = ۱ \\ ۱۰۴^\circ ۲۵' ۱۳'' = ۲ \\ ۳۸^\circ ۰۱' ۳۰'' = ۳ \\ ۹^\circ ۲۱' ۵۴'' = ۴ \end{aligned} \right\} \text{یا } ۵$
 $\left. \begin{aligned} ۳۶۲۲۰۸۸ = ۵ \\ ۹۷۰۰۰۵ = ۶ \end{aligned} \right\} \text{یا } ۶$
 در تعیین زاویه ۵

۵۴۶۷۲۴۸ = ۲

۵۷۸۴۰۵۹ = ۳

۷۱۴۲' ۱۸'' = ۴

دستور حب ۱ = $\frac{دحب}{۲}$ ول حب ۱ = لک + د + لک حب + د حب + لک - ۱۰

لک ۱ حب ۱ = ۵۷۸۴۰۵۹

لک حب ۱ = ۹۹۹۳۲۲۹

لک ۱ حب ۱ = ۵۴۶۷۲۴۸

۱۹۹۱۶۲۵۹۷

لک حب ۱ = ۹۹۹۳۲۲۹

چون آرد و جدول مقوس کنیم $۴۳^{\circ} ۳۹' ۴۰'' = ۳۹^{\circ} ۵۷' ۰۰'' = ۲۰' ۱۳'' ۱۰۴$
 و از اینجا که $۲۰' ۱۳''$ و ۹۰° هر دو مقدار α مواخت نمایند
 جواب اول $\alpha = ۳۹^{\circ} ۳۹' ۷۵$ در تعین زاویه

$$۱۸۰^{\circ} - (\alpha + \beta) = 0$$

$$۴۳^{\circ} ۳۹' ۱۸ = \alpha$$

$$۱۰۴^{\circ} ۲۰' ۱۲ = \alpha$$

$$۱۲^{\circ} ۳۱' ۵۴ = \alpha + \beta$$

$$۹^{\circ} ۲۱' ۵۴ = 0$$

در تعین ضلع

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

$$۳۷۳۷۷۱۷۲ = ۵۴۶۷۴۸۱$$

$$۹۰۲۱۰۱۲۸۸ = ۹۲۱۰۱۲۸۸$$

$$۵۰۳۸۲۲۵۷ = ۵۰۳۸۲۲۵۷$$

$$۱۲۹۸۶۸۴۱۷$$

$$۲۹۸۶۸۴۱۷ = \alpha$$

$$۹۷۰۰۰۵ = \beta$$

$$۱۸۰^{\circ} - (\alpha + \beta) = 0$$

$$۴۳^{\circ} ۳۹' ۱۸ = \alpha$$

$$۷۵^{\circ} ۳۹' ۳۹ = \alpha$$

$$۱۴۱^{\circ} ۵۸' ۲۹ = \alpha$$

$$۳۸^{\circ} ۱' ۳۹ = \alpha$$

در تعین ضلع

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

$$۳۷۳۷۷۱۷۲ = ۵۴۶۷۴۸۱$$

$$۹۷۰۸۹۵۸۴۸ = ۳۸۱۰۱۲۸۸$$

$$۵۰۳۸۲۲۵۷ = ۵۰۳۸۲۲۵۷$$

$$۱۳۵۳۵۵۹۷۷$$

$$۳۵۶۵۵۹۷۷ = \alpha$$

$$۳۶۷۷۷۸۸ = \beta$$

۱۵ هشتم پنجم - حالت چهارم - معلوم است مثلث است

جواب مجهولات

$$۱۲^{\circ} ۵۴' ۲۱ = \alpha$$

$$۵۴^{\circ} ۵۷' ۲۶ = \alpha$$

$$۳۷^{\circ} ۸' ۱۵ = 0$$

$$۱۸۰^{\circ} 0^{\circ} 0^{\circ} = 0 + \alpha + \beta$$

$$۱۶۰۰۰۳۱ = \alpha$$

معلومات

$$۵۸۹۷۲۷ = 2$$

$$۴۸۳۱۴۸ = 3$$

$$۳۵۶۲۴۹ = 4$$

نامتوس

یستوہرات

$$\frac{(m-b)(2-b)}{(2-b)b} \sqrt{v} = \frac{2}{r} \text{ وكل } \frac{(m-b)(2-b)}{(2-b)b} \sqrt{v} = \frac{1}{r} \text{ ظل}$$

$$\sqrt{(a-b)(a-b)(2-b)b} = \text{سطح} \quad , \quad \sqrt{\frac{(2-b)(2-b)}{(a-b)b}} = \frac{2}{r} \text{ظل}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4} \text{ طل } = \frac{1}{4} [(ل - ط - د) + (ل - ط - ه) + \text{مع ل} - ط + \text{مع ل} - (ط - ل)]$$

$$\text{لكل } \frac{1}{4} = \left[\text{لكل (ط-ح)} + \text{لكل (ط-هـ)} + \text{مع لك ط} + \text{مع لك (ط-د)} \right]$$

$$\text{لك ظل} \frac{9}{17} = \frac{1}{17} (\text{لك} (2-7) + \text{لك} (3-7) + \text{مع لك} 7 + \text{مع لك} (7-9))$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\text{لب ط} + \text{لك (ط-2)} + \text{الم (ط-د)} + \text{لل (ط-هـ)} \right]$$

تفصیل اعمال کا یہی کہ دستورِ امری شد

$$231, 151, 15 = 2 - b$$

$$321, 1313 = 2 - 1$$

$$1 \mu \text{F} / 1 \mu \text{A} = 2 - 1$$

$ط = ۵۶۲, ۷۱۳$ (خراب تحقیق)

دریغین لك (ط-س) و صغ لب (ط-س)

$$12\text{K}, 1\text{M}\Omega = 2-b$$

$$123456789 = 109876543$$

$$\frac{125}{2,096,336} = \frac{5 \text{ باره}}{(2-b) \text{ ت}}$$

٢٩٥٣٤٤٣٥

دو تعین لك (ط - هـ) و مع لك (ط - هـ)

۳۵۱, ۳۱۳ = ۵-۱

۲۷۵۴۲۵۱۹ = ۳۵۸,۳۱۷

۳۶ ۳۷

20042520

$$v_{1445} v_{375} = (\phi - \psi)$$

$$\Delta 19, 222 = 2$$

$$F_A \cup F_B = A$$

$$156, 149 = 0$$

$$1^{\circ}29', 12^{\circ} = 61$$

$$V_{12}/\Delta E_2 = b$$

دَرْيَعَتِ الْاَلِطِ وَمِصْرُ الْاَلِطِ

$$v_1 f_1 + \dots + v_r f_r = b$$

لأن $215 \times 317 = 68155$

12

$$2,152,0399 = 2\frac{1}{2}$$

مع لاء = ۷۱۴۵۹۶۰۱

دوتھریلک (ط-د) و مسرل

1

۲۳۱، ۴۱۴ = ۵-۶

543121-231411

VA H₂O

6-12-11

$$m(\sigma) = (a-b)/2$$

معك (ط - د) = ۳۵۶۱۰۳

مکاتبات

مستخرج من

دریغین - از روی لب ظلم

$$\text{للخُل} \frac{2}{3} = 131491 \text{ (ص ۴۲۲)}$$

$\frac{1}{2} \times 100 = 50$

$$\frac{r_{\text{ex}}}{r_{\text{ex}} \Delta V} = \frac{2}{r}$$

الف (ط - د) = ۲۳۶۴۳۱۹۶

$$2,55425 = (2-5)$$

٧١٢٥٩٦٠١ = مبرك ط

٢,٩٠٣٤٦,٣٥ = مصاريف (ط-ج)

19,951PV02

للأصل $9,9141371 =$

$$f^0 \Delta f' | f'' = \underline{2}$$

$$12^\circ \Delta F' F'' = 12$$

در یغین، از روی لك نفل

للنظر $\frac{4}{3} = 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481, 3600, 3721, 3844, 3969, 4096, 4225, 4356, 4489, 4624, 4761, 4900, 5041, 5184, 5329, 5476, 5625, 5776, 5929, 6084, 6241, 6400, 6561, 6724, 6889, 7056, 7225, 7396, 7569, 7744, 7921, 8100, 8281, 8464, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801, 10000$ (صل ٥١٤)

۲۷۰۲۸۱۴۵۰۰ ۹, ۷۱۶۵۶۵۳

$$\frac{1900}{1000} = \frac{1}{5}$$

$$2,095,336.5 = (2-b)$$

$$2,554,262.4 = (b-a)$$

مع ان ط = ۱۴۵۹۶۰۱

معك (ط-د) = ١٥٦٤٣٥٦

19, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8

للطبل $\frac{4}{5}$ = ٩٧١٤٨١٤٨

$$P^0 P^1 P^2 P^3 = \frac{1}{4}$$

$$\Delta \varphi^a \Delta \psi^i \varphi^j \psi^k = \frac{1}{2}$$

در تعین. از روی الل ظل ۴

$$\text{للظل} \frac{1}{2} = 111111.529 \text{ (معدل 69)} \quad \text{---}$$

مازاع ۹۵۲۶۱۹۶۶ ع ۱۳

$$\frac{1^\circ 36' 24''}{\mu} = \frac{0}{\mu}$$

٢٠٩٦٣٣٦٥ = ثلث (٦-٢)

نک (ط-د) = ۳۹۳۳۳۳۳۳

ص ١٤٩٩٠١ = ١

٧٣٧٥ ٧٣٧٥ = (ط-ه) مع

1905444444

$$\frac{1}{2} \sqrt{11} = 1.916515 \dots$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\nabla^2 \chi_j \cdot \nabla^2 \chi_j = 0$$

باب سوم

در تعیین مساحت

۴۹۳۴۵۱۴۳ = سطح	۲۱۸۵۴۵۳۹۹ =
۱۶۰۰۳ ۴۹۳۴۵۱۴۳	۲۱۰۹۶۳۳۶۵ = (ط-ب)
۱۶۰۰۳	۲۳۶۴۳۶۹۶ = (ط-د)
	۲۵۵۴۲۶۲۵ = (ط-ه)
	۹۸۶۹۰۲۸۵
	۴۹۳۴۵۱۴۳ = سطح
۱۶۰۰۳ = سطح	

باب سوم

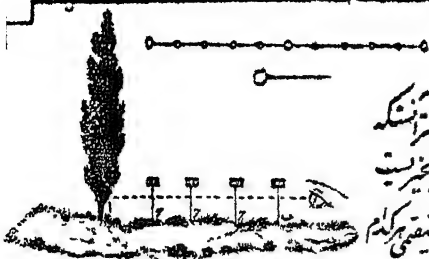
ناتیم در علم زاویگیری یعنی بیان فایده علم مثلثات در نقشه برداری و حل چند مسئله
نشان می‌دهد قبل از دخول در مطلب بهتر است که مشغول شویم بمعرف بعضی آلات هندسیه
که ناچار در عملیات لازم شوند و بکار آیند

عملیات مثلثاتی موقوف است بدستن دو شده اول استدلال و اندازه گرفتن فاصله
ما بین دو نقطه شخصی قدیم تعیین درجات و کد که حادث شود ما بین دو شعاع که از قعر
نقطه مفروضه وصل شوند و در حل مسئله اول بمرق و بنحیر بکار آید و در دویم آلات زاویگیری
و ما این آلات را با فوایدشان در علم نقشه برداری تفصیل ذکر کرده ایم ولیکن نظر بآنکه در مشق
علم مثلثات معلوم ما بعد حاجت نباشد بطریق اجمال آنچه مقتضی ابتدا استجایان کنیم

در معرفت بیرق و بنحیر مساحی

چون خواستیم شخص کنیم وضع خطی را که بوجه وصل شود ما بین دو نقطه که فاصله ایشان
است بیرقها استعمال کنیم و آنها قطعات چوب سیطی باشند بیک شکل استوانه مضلع و بر طرف
از هر کدام یکانی است برای فرو بردن در زمین و در مقام عمل دو شخص لازمست یکی را از آنها
یک سمت اند و فقط او ب چنان قرار میگیرد که دیده اش در سطح قائمی باشد که بر سر دو نقطه گذرد
و شخص دیگر ما بین دو نشانه او ب فاصله بقاصد بیرقهای د و د ... را چنان نصب
میکنند که واقع شوند در سطحی قائم که برویده ناظر و بردو نشانه او ب گذر دو هست و دیانی

مُثلثات



عبارت از همین عمل است

و در مساحت فاصله اب بیشتر باشد

زنجیر مساحی استعمال کنند و آن زنجیر است

بطول ده ذرع و مرکب از میلکاستی که یک

چارک ذرع و در ذرع مشتمل است بر چهار میل و بر هر طرفش حلقه برنجی متصل کرده اند و بر

زنجیر قطعه آهن کوچک وصل کرده اند تا فاصله پنج ذرعی فی ثانی معلوم شود و چون ممکن نیست

زنجیر یا ستقامت نمند شود محض عایت سینه و اب وقت ساختن زنجیر بقدر دو صدم

ذرع بر طولش افزاید و زنجیر متری نیز متداولست بطول ده متر و هر متر مرکب از پنج حلقه

متری پس دو نفر با زنجیر میهند در طول خط ابتدا از نقطه ا ب سمت ب حرکت میکنند و آنکس که نفع

باشد ده سیخ آهن در دست دارد و هر وقت که زنجیر میهند و طرفش در هر صورت

بر خط افقی واقع گشت یکی از آنها را در کنار دسته زنجیر بر زمین نصب کنند و دیگرش که

در عقب او است بر و آنها را بر میگرداند و در آخر هر چند سیخ که در دست دارد عدد عشر است

در همانی است که چموده است چنین خط بعد از آنکه روی زمین مساحت خط مبنی بر سوم

و در مساحت ابعاد قصیره و در مواضع کم و کثرت تبدیل زنجیر بسطره دو ذرعی پیش

و باید داشت که در اعمال مثلثاتی مساحت خط مبنی از اصول محبوب شود و کمال وقت را

باید و او مرغی داشت پس از آن چند مرتبه ذرع کنند و مجموع نتایج را بر عدد مراتب عمل

نمایند تا مقدار وسط مساحت بدست آید و معلومت که دقیق تر از آن ممکن نباشد

در کسوف ثلثات زاویه کبری

رئوس الاینها که در مساحت زوایا استعمال کنند بحسب عدو شش است زاویه یا ب قطب

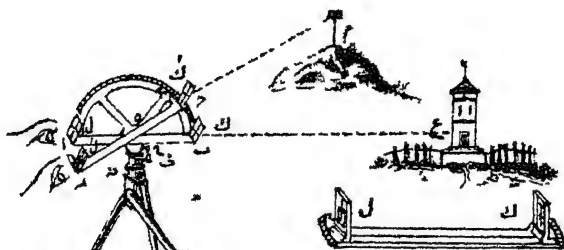
دایره طریقه طول یا په سس دایره دایره انعکاس

پیش عبارت مسد
در بسته از بونیا
برج و محوری دارد که
در ورش در درجی جدا
و یکطرف نور را بیکو
جبهه پرده آمده و
طول آن نور را بیکو
است الی سی ذرع یا
بیشتر و کمتر شده است
ذرع و با جرای زرع

و ما اینجا بتعریف زاویه یاب کشف کنیم و آلت طولیاب و دایره مکرره بر دو قلع دایره
بعلم زمین پیمائی و قطب نما و سدس دایره و دایره انگار سدس در بحر کار آید
و هر سه را در علم طالعی شرح دهند

در معرفت زاویه یاب

۸۷ هشتائی و هفتما زاویه یاب رسمی مرکب است از دایره تمام یا از نصف دایره برخی
احد که به ۹۰ قسمت شده و هر درجه بدو نیم و قطب متصل است بدایره
ولیکن قطر حد که معروف است بعصاده منحنی که اتصال بخیری ندارد و جزیره کزه و
حول و وقت ضرورت منحرکت و طرفش در جبات محیط را طی میکند و بر اطراف
اوب و و و از عصاده ساکن و منحرک



چهار قطعه فلز ل و ک و ل و ک را چنان نصب کن که ده انگشت خود را بر سطح
برنجی و هر کدام ربعی است مستطیل و رخس دارد دیگر مستطیل که نصفش عرض است و
دقیق و رخس دقیق بر وسط عرض منتهی می شود و بر وسط هر ثقبه درجه طول را می کشند
و چنین قطعات را البته کوئیم و بر طرف عصاده منحرکه قطعه فلزی مثل ۷ قرار داده شد
معروف به نو نیوس یا ورنیه (اسم دو نفر مندرسی است که واضع این آلات کوچک بودند)
که بواسطه آن مقدمه زاویه تا دقیقه مشخص شود و تمام آلت بواسطه استوانه محو

مثلثات

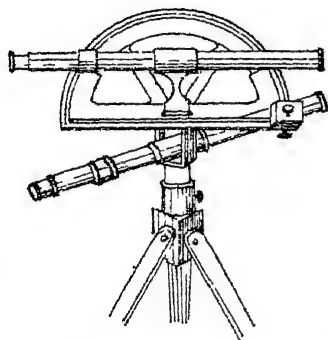
و با بیج فشار بر سه پایه سه سه سطح و سطح دایره اش را بجزکت زاویه و بیج
 کردن بیج فشار می توان بر وضع که خواهیم افقی با میل حول مرکز قرار داد
 و چون خواهیم با این حالت اندازه بگیریم زاویه حادثه ما بین دو شعاعی را که از قرارگاه ط
 بدو نشان موع و وصل شده از چنان قرار می دهیم که نقطه قرارگاهش مسقطی بر مرکز
 دایره بر یکی واقع شود و سطح اندایره بر سه نقطه ط و م و ع گذرد و دیده خود را بر شفا
 ل (رخنه دقیق لبه) از عضاده ساکن قرار می دهیم و دایره را افتد میگردانیم که شعاع
 ل ل به نقطه ع منتهی شود و بیج را سخت می کنیم تا بما نوضع بماند و بعد عضاده
 م را افتد میگردانیم که نشان م در و راء تار لبه مخفی شود آنوقت هستی که محصور
 باشد ما بین صفر درجه سمتهای محیط و صفر درجه در نیمه قدر زاویه مطلوبه م و ع است
 زاویه یاب لبه داری را که بصفت مذکور باشد استعمال کنیم جز در اعمال رسته
 مثلثاتی که دقت زیاد اقتضا نهند پس هرگاه فاصله نشان از قرارگاه آت زیاد باشد قطرا
 مانع از دقت عمل شود چنانکه آنوقت وضع امتداد شعاع خوب شخص نشود و بیشتر است که
 اگر فاصله از حد بگذرد قطر تار نشان را بکلی مخفی سازد پس در این صورت بهتر است که
 عوض زاویه یاب مذکور زاویه یاب دورین را استعمال کنید و معرفت آن
 بعد از تفصیل مذکور اشکالی ندارد

در معرفت زاویه یاب دورین

۸۸ هرگاه که این حالت مرکب است از نصف دایره بر یکی یا از دایره تمام که دو دو
 بان متصل شده یکی فوقانی و دیگری تحتانی و ثانی در حول محور خود چنان دوران کند
 سطح حادث حرکت محور لوله اش عمود باشد بر سطح دایره بر یکی این دایره چون حول
 مرکزش دوران کند هر دو دورین را با خود ببرد و دورین فوقانی ممکن است تنها حرکت

کند و پیچ فشاری وارد که بعد از سست کردن حرکتش سریع میشود و پیچ بازگشتی دارد که بحرکت او با کمال بطوسیر میکند

و چون خواهیم زاویه را اندازه بگیریم و را چنان قرار میدسیم که مرکزش با نقطه قرارگاه بر یک خط قائم باشد و سطح دایره بر سطحی برداشته بگذرد آنوقت انقدر دور میگردیم که یکی از دو نشانه در فضاء دورین تحتانی دیده شود پس پیچ فشار را سخت میکنیم و پیچ بازگشت را بسکروانیم تا آنکه نشانه با نقطه

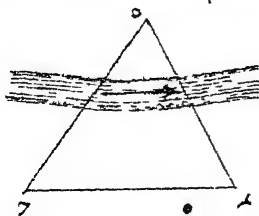


ملاقاتی دو تار مشبک دورین مقابل شود و بعد عضاده را که حامل دورین فوقانی است بر جهت حرکت بندسیم تا نشانه در فضاء دورین آید و پیچ فشار را سخت میکنیم و بوساطت پیچ بازگشت از دور و آراء مشبک دورین میاوریم و عدد درجات و دقائق را که مخصوص باشد باین صیفر

محیط دایره و صفر و زینیه دورین میخوانیم تا مقدار زاویه ثبت آید و اگر تدقیق بشود خواهیم همان زاویه را چند مرتبه اندازه بگیریم و واسطه میان آنها اختیار میکنیم و حال شعونی

میثوم محل مسائل

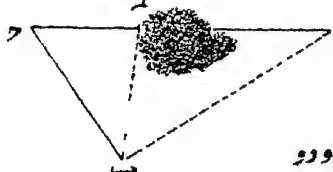
هشتمی، مسئل اول میخواهیم فاصله مقام خود را که باشد از نقطه غیر ممکن الوصول مشخص کنیم



در روی زمین بنائی مثل Δ چنان اختیار میکنیم که از طرفینش نقطه دیده شود و طولش را محسوس میکنیم و با آن زاویه یاب هر دو زاویه Δ

اندازه میگیریم و اگر بر چهار نقطه γ و δ و ϵ و θ بر سطحی مستوی باشند از روی مقدار
مفاضل ما بین دو زاویه γ و δ و ϵ و θ است که اول اندازه گرفته بودیم و آنوقت در مثل
 θ و δ و ضلع θ و δ و زاویه منتهای θ معلومت و بواسطت آنها
ثالث θ استخراج میشود و آن فاصله مطلوب است (رجوع کنید بحالات دوم)
و استخراج ضلع θ را از روی چند مثل بیای عمل تثبیت گویند و ما در
آخر مثال عددی برای این مسئله آوریم و بتفصیل حل کنیم

نقشه یکم مسئله ۳- مینویسیم خط γ را در و را ϵ یعنی امتداد دهیم



قرارگاه بی مثل θ اختیار میکنیم که
توان از آنجا دید خط γ و مانع دربینی
را که باید خط باستقامت در آن ممتد شود و دو

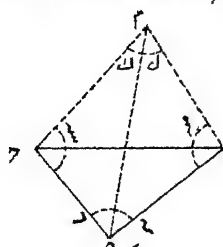
خط γ و δ را وصل میکنیم و هر دو را با خط γ اندازه میگیریم و با برق
خطی دیگر مثل θ در سمت مانع رسم میکنیم و با زاویه یا θ زاویه θ و δ
را اندازه میگیریم و آنوقت در مثل θ و δ و ضلع بر ما معلومت و از آن
 θ و δ را استخراج میکنیم و بعد در مثل θ و δ و θ جزء بر ما معلومت ضلع
و زاویه θ و δ و زاویه θ که فضل θ است بر θ و δ بر ضلع θ
و زاویه θ و δ را استخراج میکنیم و چون ضلع θ معلوم شد ابتدا از نقطه θ از
برق کوبیده θ با اندازه الضلع جدا میکنیم تا نقطه θ بدست آید و آن بر استقامت
 θ واقع است و بواسطت زاویه معلومه θ و در طول θ و سمت مانع
یا در خلاف آنجهت میرسیم و برق می نشانییم

نقشه دوم مسئله ۴- سه نقطه γ و δ و ϵ بر زمین چواری من

مثلاث

۸۹

شده مقصود آنست که بر صفحه نقشه از زمین نقطه مثل م مشخص کنیم
که از اینجا دو فاصله ده و ده و تود و زاویه کردند که دوروی زمین
اندازه گرفته شده



بعرفت دوزاویه ده و ده م محل نقطه
بدست میاید چرا که هرگاه در صفحه نقشه از دو نقطه
و ده اند و زاویه را بر ده و بر ده رسم کنیم دو

جدید بر نقطه مطلوبه م متقاطع میشوند پس زاویه ده م را سه فرض میکنیم و زاویه ده م را سه و برای تعیین این دو مجهول فاصله ده = د و فاصله ده = ز و زاویه ده م را اندازه میکنیم و دوزاویه ده م = ل و ده م = ل اول معلوم فرض
شده و زمین چون بهوار است چهار نقطه ده و ده و ده و ده بر سطحی متویق میباشد
و در این صورت مجموع زوایای ذوار به ضلوع ده م معادلت با چهار رتبه

$$(ل + ل) + سه + ده + ده = سه$$

$$سه + سه = سه - (ل + ل + ده + ده)$$

و چون سه + سه و بعد از آن $\frac{1}{4}$ (سه + سه) معلوم گشت مقدار $\frac{1}{4}$ (سه + سه)
را نیز بوجیکه در حالت دوم ده بیان کرده ایم استخراج میکنیم پس در مثل ده م آن

$$\text{مثاب حاصل شود } \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده}$$

$$\text{و در مثل ده م این تناسب } \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده} \text{ و از اینجا}$$

$$ده = \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده}$$

و آنوقت دو مقدار ده م با هم معادل میشوند با این صورت

$$\frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده} \text{ و از اینجا } \frac{ده}{ده} = \frac{ده}{ده}$$

حال خطی متخیز میکنیم $\frac{د}{د}$ که معادل باشد با $\frac{حسب}{حسب}$ و بعد معلوم
نمودنش $\frac{حسب}{حسب} = \frac{د}{د}$

و آنوقت موافق قاعده دهیم این مساوات استخراج میشود

$$\frac{حسب - حسب}{حسب + حسب} = \frac{د - د}{د + د} \text{ و بعد } \frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)} = \frac{د - د}{د + د} \text{ (ب)}$$

و از دستور اخیر مقدار ظل نصف (سه - سه) و بعد خود مقدار نصف (سه - سه)

استخراج میشود و درین صورت $\frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)}$ و درست است و بکن

و تقریباً آن مقدار سه و سه جدا جدا مشخص میشود

مقدور و قیاس یکتا دستوری که استخراج شد بر این فرض بود که محل نقطه م

در درون زاویه ۷۵ باشد و بنابراین در اربعه اضلاع ۷۵ م را بوجهی که اول

ذکر شد باید رسم نمود و درین صورت جمیع معادلات فوق مطابق آیند با فرض مسئله

و هر که لازم از دوزاویه سه و سه کوچکتر میشوند از ۱۸۵

و لیکن ممکن است که $\frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)}$ از ۹۰ درجه تجاوز نکند و چون سه کمتر از

۱۸۵ درجه است $\frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)}$ از ۹۰ درجه کمتر میشود و آنوقت $\frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه + سه)}{(سه + سه)}$

منفی میشود و ظل $\frac{ظل}{ظل} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)}$ مثبت پس درین صورت شرط دستور (ب)

اینست که $\frac{ظل}{ظل}$ اقصر باشد از د و لهذا دستور مذکور را با این صورت بنویسیم

$$\frac{ظل}{ظل} = \frac{د - د}{د + د} = \frac{(سه - سه)}{(سه + سه)}$$

و هرگاه نقطه م در درون زاویه ۷۵ نباشد باید سائل را با اطلاع و سپس اگر د

زاویه مقابل بآن باشد و در معادلات سابقه ۷۵ را بدل کنیم به ۷۵ -

۷۵ و اگر در یکی از دوزاویه ۷۵ و ۷۵ باشد باید آن زاویه را اندازه گرفت

و در جای ۷۵ قرار داد و همین ملاحظات را باید نمود در آن حالات که نقطه م واقع

باشد در زاویه مقابل به ۷۵° یا به ۷۵°

و هرگاه $\frac{1}{2}$ (سه + سه) $= ۹۰^\circ$ و ۹۰° مساوات (ب) منجر میشود به
 $۵ = ۵$ یعنی هیچ جواب از آن روی معلوم نشود و در اینجا مسئله یا که است یا
 که چون سه + سه معادلت با ۵ حاصل معلوم میشود که ذواب ربع اضلاع ۷۵°
 در دایره محاط میشود و در این صورت شرط امکان مسئله نیست که زاویه ۷۵°
 برابر باشد با ۷۵° و زاویه ۷۵° با ۷۵° و آنوقت لازم می آید که $۷۵^\circ = ۷۵^\circ$ یعنی
 $\frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ} = \frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ}$ یا آنکه $\frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ} = \frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ}$ چرا که $\frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ} = \frac{۷۵^\circ}{۷۵^\circ}$
 پس اگر ذواب ربع اضلاع در دایره محاط شود و زاویه که مساوی باشد با ۷۵°
 و زاویه ۷۵° با ۷۵° ما از مجموع نقاط دایره خطیه هر که نام از دو فاصله ۷۵° و ۷۵° را

برای مشخصه می بینیم
 فاصله بین آنها مسئله می شود و می خواهیم شخص کنیم ارتفاع ۷۵° غارتی را که در



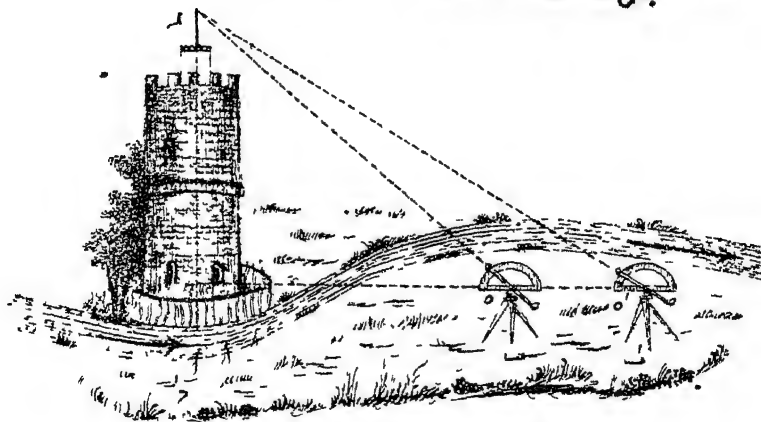
بمسقطی الحرجش ممکن باشد
 پس زمین را هموار فرض میکنیم و آنوقت اگر
 مثلاً بشکل برج باشد و اگرگاه ب
 آلت را چنان جهتیار میکنیم که فاصله
 از موقع برج نسبت به ارتفاع مطلوب است

چندان طولی باشد و نه چندان قصیر

و زاویه یاب را اینجا نصب میکنیم و شعاعی افقی نسبت محور برج ممتد میسازیم و شعاع
 نسبت ریش ۷۵° لهذا سطح دایره بر کجی را با شاغول بوضع قیام قرار میدیم پس
 خطی را بایده بر سطح دایره منطبق شود و عضاده ساکن را بوضع افقی میسازیم پس

شاغل بر مرکز دایره و بدرجه ۹۰ کز دو عضاده متحرک را باستقامت ۵۰ میاویم
و مقدار زاویه ۷۰۰ را میخوانیم و بعد فاصله ب را که مساویت با ۵۰ باشد
اندازه میگیریم و آنوقت در مثل قائم الزاویه ۷۰۰ زاویه ۷۰۰ وضع
برامعالمست بر ضلع ۵۰ را استخراج میکنیم و آن ارتفاع رأس برج است
سطح اهری که بر مرکز زاویه باب گذرد (رجوع کنید بجلد بیستم و ۵۰) و قامت
الت را بر آن اضافه میکنیم

مثال ۷۰ = ۶۶ ۸ ۵۱ ۵۰ = ۱۴۱ ۱۰ ۵۰ جواب ۵۰ = ۹۸ ۴۸ ۵۰
نوع دوم مسئله - میخواهیم شخص کینم ارتفاع ۵۰ عمادتی را که در
بمقط الجرس ممکن نباشد



در بنای افقی مثل باب اختیار میکنیم که استقامت بر مرکز برج گذرد و
طرفیش رأس دیده شود و طولش را اندازه میگیریم و بعد دو زاویه ۷۰۰ و
۷۰۰ را با زاویه باب و تمام زاویه اول را تا ۵۰ میگیریم و آنوقت در مثل ۵۰

ضلع ه ه = ببب و دوزاویه ضیق آن بر معلومت و ضلع ه ه را استخراج میکنیم
و بعد در مثلث قائم الزاویه ه ه ه ضلع ه ه و زاویه ه ه ه معلومت ضلع ه ه
را استخراج میکنیم (حالت اول ۶۸) و طول قائم آل را بر آن اضافه میکنیم ارتفاع
مطلوب بدست آید

مثال ه ه ه = ۱۴۶۶۲ و زاویه ه ه ه = ۲۹ و زاویه ه ه ه = ۱۷
اول کل زاویه ه ه ه را میگیریم ه ه ه = ۳۱ و پس ه ه ه = ۱۲

عمل تعیین ارتفاع ه ه

عمل استخراج ضلع ه ه

لل ه ه ه = ۱۲۵۴۳۳۵۶

لل ه ه ه = ۱۶۹۱۴۵۲

لل ه ه ه = ۷۸۲۱۱۲۱۷

لل ه ه ه = ۹۷۳۹۳۹۸۰

لل ه ه ه = ۱۵۷۵۴۵۷۳

لل ه ه ه = ۵۱۴۵۷۹۲۴

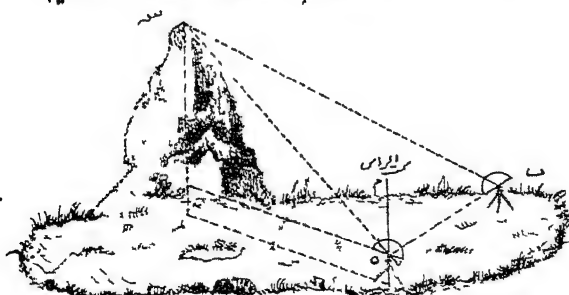
ارتفاع ه ه ه = ۳۶۶۶۲۳

لل ه ه ه = ۱۲۵۴۳۳۵۶

و باید ارتفاع آل را بر آن اضافه نمود

ه ه ه = ۵۷۹۸

۹۶ نوک ششم مسئله ۷- میخواهیم ارتفاع کوهی را مشخص کنیم



اول بنای ه ه را اختیار میکنیم و طولش را اندازه میگیریم و در طرفش دوزاویه
سده ه ه و سده ه ه را معلوم میکنیم و آنوقت در مثلث سده ه ه دوزاویه و ضلع
ه ه

پنجاه معلومت و ضلع سده را استخراج میکنیم و در نقطه اندازه مسکه مزایه
سده م که توهم میشود باین خط قائم و شعاع سده و متمم آنرا معلوم میکنیم و آنوقت
در مثلث قائم الزاویه سده و وتر سده و زاویه سده معلومت و ضلع سده
را استخراج میکنیم و آن ارتفاع فله کوه است از سطح آلت

$$\text{مثال ه ب} = ۴۸ ر ۱۸ و سوب ه = ۵۰ ۱' ۴۲ و سده ب = ۵۰ ۴' ۲۱ ۱۱ و سده د = ۵۰ ۲' ۳۱ ۶$$

جواب د سده = ۵۵ ۵ ر ۲۸۶

نویسند ^{۹۷} مسئله ۸ - یعنی اھم شخص کنیم طول ضلع کثیر الاضلاع مستطیل

که صاحب ۵۴ ضلع باشد و محیط باشد و دایره که نصف قطرش ۴۲ ر ۲۱۶
ذکر میشود

از مرکز دایره خطی بر وسط ضلع داخلی دیگر بر طرفش وصل کنید تا مثلث قائم الزاویه عادی
شود و در آن مثلث طول وتر مساویت با ۴۲ ر ۲۱۶ ذرع و زاویه حاده مرکزی
مساویت با کجی از ۸۸ اجز و ۶۳ یعنی با ۳۰۴ است و ضلع مقابل زاویه
نصف طول مطلوب است پس مثلث را حل میکنیم و نصف ضلع ۴۲ ر ۵۱۲ ذرع میشود

و بنابراین تمام ضلع ۱۴۱ ر ۲۵۱ ذرع است

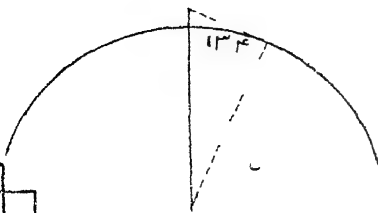
نویسند ^{۹۸} مسئله ۹ چند ذرع باید از سطح

زمین بلند تا آنکه فاصله مسقط

الحجر از حله مد بصر ۱۳۴ فرسنگ با

از روی شکل ظاهر است که مثلث مخرب

بجای مثلث قائم الزاویه یک ضلع مجاور زاویه



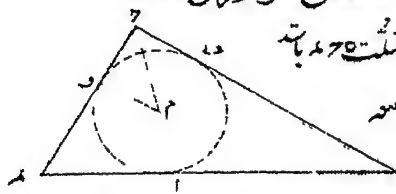
مثلاً

۹۵

قائم و کراویه جاده اش معلومت و ضلع معلوم نصف قطر زمین است و مساویت با
 ۱۲۷۷۵۱۲ (محیط زمین بحسب صحیح شاه) و زاویه جاده مقابل است بقوسی از دایره
 خطی زمین که ۱۳۴ درج است شش درجی طویش باشد و عدد درجات نقوس این
 مساوات استخراج شود $\frac{۱۳۴ \times ۶۰۰۰}{۳۸۱۲۷۵۱۲} = \frac{۳۶۰}{۳۸۱۲۷۵۱۲}$ و $۳۶۰ = ۳۸۱۲۷۵۱۲$
 پس و تراشمت را معلوم میکنیم و نصف قطر زمین را از آن تفریق مینمایم تا ارتفاع مطلوب
 مفود فند مسئله اینجا هم معلوم کنیم نصف قطر دایره محیطیه و نصف
 قطر دایره محیطیه بر مثلثی که هر سه ضلعش معلوم فرض شده

۹۹

و زمین یکیم نصف قطر دایره محیطیه در مثلث حد بد به
 و نصف قطر دایره محیطیه بر مثلث و سه
 سطح مثلث و ط مجموع محیط



پس $م = ط د و د = ط ه = ط د$ و $ط (ط - د) (ط - ه) = ط (ط - د) (ط - ه)$
 و چون بستور اصل ذیل فاکر کنیم باز همین بستور استخراج میشود
 نقاط ا و ب و د نقاط تماس دایره محیطیه در مثلث باشد با ضلاع ۲ و د و د
 پس $ح د = ط - ۲$ زیرا که مجموع سه خط مماس در د راه مساویت با نصف محیط
 مثلث و بنابراین $ح د = ط - (۲ + ۱ ا ه) = ط - ۲$ و در مثلث قائم الزاویه ح د
 ضلع م ر ح د ظل م ح د یا آنکه

$$ح د = ط - ۲ \quad \text{ظل} \frac{ح د}{م} = \frac{ط - ۲}{ط} \quad \sqrt{(ط - ۲)(ط - د)} = \frac{(ط - ۲)(ط - د)}{(ط - ح)}$$

و اما نصف قطر ن در اصول هندسه ثابت نموده ایم که حاصل ضرب سه ضلع مساویست

با ابعاد مثال حاصل ضرب مساحت مثلث در نصف قطر دایره محیطیه یعنی $۲ د ط ا ه$

باب دوم

۹۶

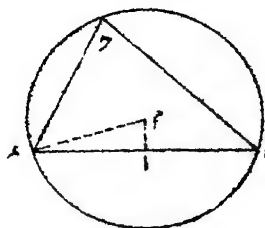
$$\frac{2 \text{ ده}}{\sqrt{12} \text{ ط} (2 \text{ ط} - 2) (2 \text{ ط} - 2) (2 \text{ ط} - 2)} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2}$$

و بنابرین ن = ۲ ده

و بوجهی که نیز همان دستور استخراج شود
از مرکز م از دایره محیطیه بر مثلث حده نصف قطر م را رسم کنید و عمود م را
بر ضلع حده اخراج کنید پس در مثلث قائم الزویه

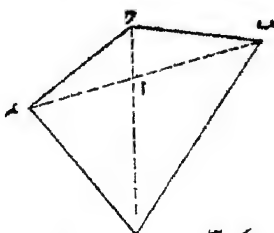
$$م \text{ اضلع } ۱۸ = م \text{ ح } ۱۲ \text{ یا } ۱۸$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{2} = ۷$$



$$\frac{2 \text{ ده}}{\sqrt{12} \text{ ط} (2 \text{ ط} - 2) (2 \text{ ط} - 2) (2 \text{ ط} - 2)} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2} = \frac{2 \text{ ده}}{4 \text{ ط}^2}$$

۱۰۰ صدم مسئله ۱۱- دو ذواکبته اضلاع حده ب طول دوتا



حده و د ب و زاویه بینهما حده

معلوم است و معلوب باشد آن

$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

و چون این دو مساوات را جمع کنیم و ملاحظه نماییم که دو زاویه یکمکه دایره حده حده
جیب واحدیه باشند این مساوات نتیجه شود

$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

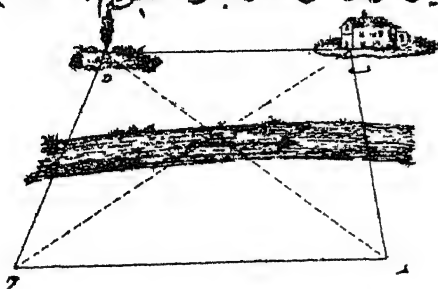
$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

$$\frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰$$

یعنی که حسب ذوار بعد از ضلع مساویت با نصف حاصل ضرب دو قطرش در جیب زاویه بینش

مثال عمل تثلیث

۱۰۱ میخوام فاصله مابین دو نقطه غیر ممکن الوصوله و ب را مشخص کنم (ن)



معلومات

$$\begin{aligned} ۵۱^{\circ} ۱۴' ۲۰'' &= ۵۶^{\circ} ۱۴' ۲۰'' \\ ۵۳^{\circ} ۱۹' ۵۰'' &= ۵۸^{\circ} ۱۹' ۵۰'' \\ ۱۵^{\circ} ۲۷' ۲۰'' &= ۶۵^{\circ} ۲۷' ۲۰'' \\ ۱۱^{\circ} ۱۸' ۴۷'' &= ۷۶^{\circ} ۱۸' ۴۷'' \\ ۴۳^{\circ} ۱۸' ۳۱'' &= ۸۰^{\circ} ۱۸' ۳۱'' \\ ۲۷^{\circ} ۵۸' ۵۷'' &= ۸۵^{\circ} ۵۸' ۵۷'' \end{aligned}$$

مجهول ه ب = ۵۱ ۵۸ ۵۷ = ۲۷۵

باید اول دو ضلع ه د و ب را استخراج نمود و یا لك ه د و لك ب د
چونكه بعد از تعیین این دو خط مثلثاتی هرگاه زاویه ف را بدستور بدست استحال کنیم
زود بجواب میرسیم پس مشغول شویم با استخراج لك ه د و لك ب د

در تعیین لك ه د از روی مثلث د ه د

$$\frac{\text{دستور}}{۵۰} = \frac{\text{ح ب د}}{\text{ح د ه}} = \frac{\text{ح د ه}}{\text{ح ب د}} = \frac{\text{ح د ه}}{۵۰} \text{ و از اینجا } ۵۰ = \frac{\text{ح د ه}}{\text{ح ب د}}$$

و لك ه د = لك ب د + لك ه د + مع لك ح د = ۱۰۰ - ۵۰ = ۵۰

تفصیل اعمال

لك ب د یا لك ح د = ۵۱ ۵۸ ۵۷ = ۲۷۵

در تعیین لك ح د

۱۵ ۲۷ ۲۰ = ۶۵

لك ح د = ۱۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰ (ص)

باراء ۴ ۸

لك ح د = ۱۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰

لك ب د = ۵۱ ۵۸ ۵۷ = ۲۷۵

لك ح د = ۱۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰

مع لك ح د = ۱۵ ۲۷ ۲۰ = ۱۵۵ ۲۷ ۲۰

۱۱۹۳۶۷۵۲۲

لك ه د = ۱۱۹۳۶۷۵۲۲

باب سحر

۹۸

در تعیین مع لك حب ده

$$110^\circ - (10^\circ + 0^\circ) = 100^\circ$$

$$53^\circ 19' 50'' = 100^\circ$$

$$15 \quad 27 \quad 24 = 100^\circ$$

$$131^\circ 47' 14''$$

$$129 \quad 59 \quad 60 = 110^\circ$$

$$14^\circ 12' 46'' = 100^\circ$$

۲۳۰
لك حب ده ۱۲' ۴۰" = ۴۱۸۷۶۶۹ (تقابل)

بازاء " ۱۴۴

لك حب ده ۱۲' ۴۰" = ۴۱۸۷۶۹۱۳

مع لك حب ده = ۴۱۸۷۶۹۱۳

در تعیین لك ب از روی مثلث ح ب د

$$\frac{ب}{ب} = \frac{حب ده}{حب ده} \quad و \quad \frac{ب}{ب} = \frac{حب ده}{حب ده}$$

لك ب د = لك د + لك حب ده + مع لك حب ده - ده

تخصیلات عال

ب د = ۳۱' ۱۸"

۱۹۳
لك حب ده ۳۱' ۱۸" = ۴۱۸۷۶۹۵۲ (تقابل)

بازاء " ۱۹

لك حب ده ۳۱' ۱۸" = ۴۱۸۷۶۹۷۱

در تعیین مع لك حب ده

$$110^\circ - (10^\circ + 0^\circ) = 100^\circ$$

$$11^\circ 18' 42'' = 100^\circ$$

$$47 \quad 18 \quad 31 = 100^\circ$$

$$121 \quad 32 \quad 18$$

$$129 \quad 59 \quad 60 = 110^\circ$$

$$14^\circ 22' 46'' = 100^\circ$$

۳۴
لك حب ده ۲۲' ۴۰" = ۴۱۸۷۶۹۵۸

بازاء " ۳۴

لك حب ده ۲۲' ۴۰" = ۴۱۸۷۶۹۵۲

مع لك حب ده = ۴۱۸۷۶۹۵۲

لك د = ۴۱۸۷۶۹۱۰۸

لك حب ده = ۴۱۸۷۶۹۷۱

مع لك حب ده = ۴۱۸۷۶۹۵۸

۱۱۷۴۵۳۹۸۷

لك ب د = ۴۱۸۷۶۹۵۲

مثلاث

۹۹

حال در مثلث ه ب د چون زاویه ه ب د = د و لك ه و لك ب د معلوم
ضلع ه ب آسانی مشخص شود پس اول مشغول شویم بتعیین زاویه ه ب د و زاویه
د ه د = د و اینجالت د ه است رجوع کنید به (۲۶)

در تعین $\frac{0}{p} + \frac{0}{p}$

$$0 + 0 = 180 - 180$$

$$179^{\circ} 59' 60'' = 180^{\circ}$$

$$27 \quad 51 \quad 52 = 180$$

$$180^{\circ} \quad 1' \quad 2'' = 0 + 0$$

$$180^{\circ} \quad 0' \quad 31'' = 0 + 0$$

در تعین $\frac{1}{p} (0 - 0)$

$$\frac{\text{ظل } \frac{1}{p} (0 - 0)}{0 + 0} = \frac{\text{ظل } \frac{1}{p} (0 - 0)}{0 + 0}$$

$$\text{یا ظل } \frac{1}{p} (0 - 0) = \text{ظل } (45 - 0) \text{ ظل } \frac{1}{p} (0 + 0)$$

و ف زاویه فرض شده که ظلش مساوی باشد با $\frac{1}{p}$ (۲۶)

$$\text{لك ظل ف} = \text{لك ب د} + \text{مع لك د ه}$$

$$\text{لك ظل } \frac{1}{p} (0 - 0) = \text{لك ظل } (45 - 0) + \text{لك ظل } \frac{1}{p} (0 + 0) - 10$$

فكر استخراج زاویه ف و زاویه ۴۵ - ف

در تعین ف از دو کادویم ظلش

$$\text{لك ظل ف} = 9793660 \quad \text{بازاء}$$

$$31^{\circ} 52' 20'' \quad 9793660 \quad \text{بازاء}$$

$$31^{\circ} 52' 20'' \quad 143 \quad \text{ف}$$

$$31^{\circ} 52' 20'' = \text{ف}$$

$$\text{لك ب د} = 112403912$$

$$\text{مع لك د ه} = 10532273$$

$$\text{لك ظل ف} = 9793660$$

$$31^{\circ} 52' 20'' = \text{ف}$$

$$45 - \text{ف} = 13^{\circ} 17' 31''$$

در تعین لك ظل $\frac{1}{p} (0 - 0)$

مُثَلَّثَات

١٥١

امثلجينا ومثلثات قائم الزوايا

١٥٢

جواب مجهول

معلوم

$$٤٧' ٢٢' ١'' = ٥$$

$$٣١٩٧٣٣٣ = ١$$

$$٢٨٤٧٣٣٣ = ٥$$

$$٤٢٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٢٤٣٩٤٣ = ٤$$

$$٥٠' ٣٣' ٤٣' = ٤$$

$$٤١٧٢٣٣٣ = ٢$$

$$٣٩٢٣٣٣٣ = ٥$$

$$٣٢٤٥٣٣٣ = ٤$$

$$٣٥٩١٣٣ = ٥$$

$$٢٧١٣٣٣٣ = ٤$$

$$٣٩' ٣١' ٥٩' = ٥$$

$$٥٠' ٢١' ٥٩' = ٤$$

$$٣٦٠١٣٣٣ = ٢$$

$$٣٢٩٢٥٣٣٣ = ٥$$

$$١٨٩٥٣٣٣ = ٤$$

$$٣١' ٢٩' ١٣' = ٤$$

$$٢٣١٣٣٣٣ = ٥$$

$$٥٩' ٣٥' ٥٢' = ٥$$

$$٣٥٣٣٣٣٣ = ٢$$

امثلجينا ومثلثات غير قائم الزوايا

جواب مجهول

معلوم

$$٤٣٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$١١٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٤٣٣٣٣٣٣ = ٥$$

$$٣١٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٤٣٣٣٣٣٣ = ٥$$

$$٢٥٣٣٣٣٣ = ٢$$

$$٢٢' ١٢' ١٥' ٢٣' = ٤$$

$$٢٧٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$١٤٣٣٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٢١٩٩٣٣٣ = ٢$$

$$١٢٥' ٥' ٥' = ٥$$

$$٢٥٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٢٢٣٣٣٣٣ = ٥$$

$$٢٥٣٣٣٣٣ = ٤$$

$$٣٦٢٣٣٣٣ = ٥$$

ثانيا

۷۹ ۵۷ ۴ ۹ ۴ = ۳	۵۴ ۲۱ ۷ ۵ ۹ ۱ = ۲	ثالثا
۲۱ ۴ ۱۱ ۴ ۳ = ۴	۵ ۵ ۵ ۵ ۷ ۶ ۴ = ۵	
۲ ۶ ۷ ۵ ۷ ۷ = ۵	۲ ۶ ۷ ۵ ۷ ۷ ۶ = ۵	
۱ ۳ ۱ ۷ ۵ = ۱	۵ ۱ ۹ ۷ ۲ ۷ = ۲	رابعا
۱ ۷ ۵ ۴ ۲ ۷ = ۳	۴ ۱ ۳ ۱ ۷ ۴ ۱ = ۵	
۵ ۴ ۵ ۷ ۲ ۷ ۶ = ۱	۳ ۵ ۶ ۲ ۷ ۴ ۹ = ۵	
۳ ۷ ۱ ۴ ۳ ۴ = ۳		
۱ ۳ ۵ ۱ ۹ ۷ ۱ ۵ = ۷	۳ ۵ ۹ ۵ ۱ ۴ ۷ = ۲	خامسا
۵ ۱ ۵ ۷ ۵ ۷ ۸ ۵ = ۱	۲ ۹ ۴ ۶ ۲ ۶ ۸ = ۵	
۲ ۶ ۷ ۲ ۱ ۷ ۴ = ۵	۴ ۲ ۵ ۱ ۴ ۳ ۳ = ۵	
۶ ۲ ۱ ۶ ۲ ۳ = ۳	۲ ۳ ۱ ۶ ۲ ۴ ۴ = ۲	سادسا
۵ ۴ ۳ ۱ ۳ ۲ ۶ = ۴	۲ ۱ ۹ ۱ ۵ ۶ ۵ = ۵	
۶ ۳ ۵ ۴ ۴ = ۵	۲ ۴ ۵ ۳ ۶ ۶ ۷ = ۵	
۷ ۷ ۳ ۳ ۳ ۷ ۱ ۵ = ۷	۴ ۱ ۷ ۶ ۳ ۷ ۱ ۶ = ۲	سابعا
۴ ۳ ۴ ۵ ۵ ۷ ۵ = ۱	۴ ۷ ۲ ۵ ۹ ۷ ۴ ۲ = ۵	
۶ ۵ ۱ ۶ ۵ ۹ ۵ = ۴	۵ ۱ ۴ ۵ ۲ ۶ ۱ = ۵	

چند مسئله حل کردنی متعلق بعلم مثلثا

۱۰۳

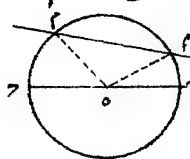
- مسئله اول - معلوم کنید طول نصف قطر دایره را که فضل قوس ده ذرع باشد
بر وتر آن قوس افتد باشد از هر از یک ذرع
- مسئله ۲ - معلوم کنید اجزای مثلثی را که قاعده و ارتفاع و فضل مابین
دو زاویه جنبین قاعده اش مفروض باشد
- مسئله ۳ - حل کنید مثلثی را که سه تفاعش معلوم باشد
- مسئله ۴ - معلوم کنید مساحت دو ذوقه را که چهار ضلعش مفروض باشد
- مسئله ۵ - رسم کنید مثلث متساوی الاضلاع که رؤس واقع باشند بر سه دایره

مُثَلَّنَات

۱۰۴۳

مطلوبه که در این مسئله خط مستقیم متوازی افق در یک سطح یابد و در سطح

مشکله - از نقطه ب واقع بر استقامت



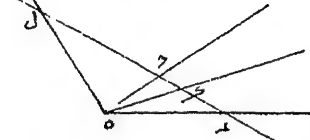
قطر د از دایره ه

خطی مثل ب م م رسم کرده ایم که دایره را

بر دو نقطه م و ن قطع کرده پس برین بناییم که مقدار حاصل ضرب ظل $\frac{1}{2}$ م ب

x ظل $\frac{1}{2}$ م ب و در همه حال ثابت است بر وضع خط قاطع را رسم نموده باشیم

مسئله ۱ - چهار خط ه ل و د و ک و م از نقطه با طرف می کشند



و خط ل د که همه را قطع نموده پس ثابت کنید

که نسبت $\frac{ل د}{ل ه} : \frac{ل د}{ل ه}$ در هر صورت ثابت است

مسئله ۱ - چهار سطح ه ل و د و ک و م

و م بر خط ه م رو کرده اند و چون خط فصل مشترک همه آنها شده و خط

ل د که هر چهار را قطع نموده پس برین بناییم که نسبت $\frac{ل د}{ل ه} : \frac{ل د}{ل ه}$ در هر صورت ثابت است

مسئله ۲ - دو کثیرالاضلاع منظمه که هر کدام صاحب ۴ ضلع باشند یکشان

محیط است بر وایره که بنصف قطر ذ رسم شده و دیگر محیط است در همان دایره و معضو

است که مساحت هر دو از روی و ذ مشخص کنیم و از آن روی استنباط کنیم یعنی اگر

همه مفرکشته است میان مساحت دو کثیرالاضلاع منظمه محیطی و محیطی که صاحب

۴ ضلع و ۲ ضلع باشند

۱۰۴۴ خاتم در تبیین ابعاد و با فن ارتفاعات یا مداخلات مثلثات

مسئله اول - چون خواهیم از نقطه ا بعد اب را مشخص کنیم عمود باشیم

بر طرف خط موسوم اب خط را را و به هم میزنیم و مسافتی بقدر اد و تو به هم میزنیم خط ب ج

را

خامنه

۱۰۴

را و امتدادش بهم تا نقطه ط در جانب

دیگر خط ا ب

بعد از آن باید به بیانی از خط ح و مقدار

ح و از نقطه م عمودی بر خط ر ا در ج نقطه ط استخراج نمود تا ملاقی نماید خط

ط را بر نقطه ه و آنوقت طول عمود م ه بدست میاید پس آنرا ضرب کنیم در خط

ح ا و آنجمله بر آن قسمت کنیم حاصل را بر خط م ه خارج قسمت نمود تا اب بدست

زیرا که بتشابه دو مثلث قائم الزاویه ا ب ح و م ه ح این تناسب نتیجه میشود

ا ب : م ه = ا ح : م ه و بعد این تناسب مل = $\frac{ا ح \times م ه}{م ه}$ مثلاً هرگاه خط

ا ح یکصد ذرع و خط م ه بیت و پنج ذرع و عمود م ه بت و پنج ذرع باشد

مکنند - در تعیین فاصل میانین د و نقطه ا و ب که از یکی از آنها دیگر را

نمی توان رویت کرد

باید نقطه ثالثی اختیار نمود مثل ه

که از آنجا میتوان هر دو نقطه ا و ب را نظر آورد

و از آن نقطه میوه دو بعد

ا ه و ه ب را

و هر دو را در جهته دیگر نقطه ه است و داد تا دو نقطه ح و م و بعد ج را که دار و خط

ح ه و م ه و یا از دو خط ا ه و ه ب دو جزء ه ر و ه ط را که متناسب باشند

با دو خط ا ه و ه ب و وصل نمود خط ر ط را و ضرب نمود طولش را بر ه ط و در هر

دو صورت خارج قسمت مقدار مطلوب است

زیرا که بتشابه دو مثلث ه ا ب و ه ر ط این تناسب حاصل میشود مل : ر ط = ا ه : ه ب

نمودی که در این شکل دیده میشود
مل = $\frac{ا ح \times م ه}{م ه}$

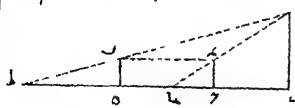
در ه ا قسمت نمود
حاصل را بر ه ر یا
ضرب نمود همان
ر ط را در ه ب
و قسمت نمود حاصل را

خاتمه

۱۰۶

مسئله ۳- در تقین ارتفاع اب که وصول بسقط الحجرش ممکن نباشد
بر سطح افق در دو نقطه $د$ و $ه$ دو شاخص متساوی $د$ و $ه$ را چنان نصب کنیم

این هر دو ورشس مرتفع یعنی نقطه $ا$ وسطی واقع شوند و در افق و بعد دو شعاع $ا$ و $ا$ و $ا$



را امتداد میدهند تا زمین را در دو نقطه $ب$ و $ج$ قطع کنند تا وقت سه فاصله $د$ و $ه$

$د$ و $ه$ را می نمایند و حاصل ضرب دو جز اول را تقسیم میکنیم بر تفاضل $ه$ و $د$

و خارج قسمت مقدار $ب$ است پس $ج$ را بر آن نیز انباشتیم $ب$ حاصل شود آن

وقت از روی مقدار معلوم $ب$ و $ج$ و شاخص $د$ و $ه$ و بدستور مسئله سابق

ارتفاع اب را مشخص نماییم

بر این تشابه دو مثلث $د$ و $ا$ و $ب$ این تشابه نتیجه میشود $ا$: $د$ = $ب$: $ط$ و

و نیز تشابه دو مثلث $ه$ و $ا$ و $ج$ این تشابه $ا$: $ه$ یا $د$ = $ج$: $ط$

و بعد این تناسب

و بتفصیل نسبت $ب$ - $ج$: $ط$ - $ط$ = $د$ - $ه$: $ط$ - $ط$

یا $ب$: $ج$ = $د$: $ه$ = $ط$: $ط$

و بتفصیل نسبت $ب$: $ج$ = $د$: $ه$ = $ط$: $ط$

یا $ب$: $ج$ = $د$: $ه$ = $ط$: $ط$

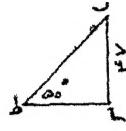
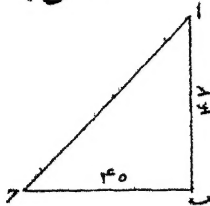
و بعد این مساوات $ط = \frac{د \times ج}{ج - د}$

در تقین اب با ملاحظه تقیلات و تشابه مثلثات

در چنین اعمال باید اولاً بسبب مقدار یک زاویه یا زاویای لازم مثلثی را معلوم کرد
و در روی زمین یک ضلع یا دو ضلع مثلث را پیمود و بعد در روی کاغذ نقیسه آن

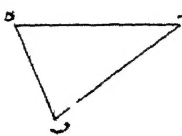
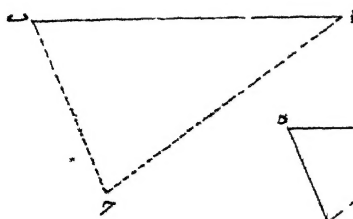
و مثلی رسم نمود که اضلاع و زوایای مطابق اضلاع و زوایای مثلث مطلوب باشد و
انجام مثلث طول خط مطلوب را نسبت بمقیاس معلوم کرد بر آن یعمل از روی نمود
بندی ظاهر است و من باب توضیح چند مثالی ذکر کنیم

۱۰۶ مسئله اول میخواهیم بعد نقطه ب را از محل ا مشخص نماییم
پس مثلث قائم الزاویه اب د را توهم نموده ضلع ب د را مثلاً ۴ ذرع جدا



میکینم و زاویه د را اندازه میکنیم
۵۰ درجه است پس در روی کاغذ
مقیاس رسم نموده مثلث قائم الزاویه
و د ط را مطابق مقیاس و زاویه

مربوره رسم میکنیم یعنی ضلع ۲ ط را ۴ ذرع و زاویه ط را ۵۰ درجه آنوقت
طول و د را بمقیاس میخیم ۴۲ ذرع میشود و آن طول اب مجهول است
۱۰۷ مسئله دوم میخواهیم بعد نمایین دو نقطه ا و ب و اگر مانعی بین آنها



واقع است مشخص کنیم
پس در نقطه د ایستاده مثلث
اب د را توهم نموده دو ضلع
د ا و د ب را میخوانیم و زاویه
د را با اسباب اندازه گرفته

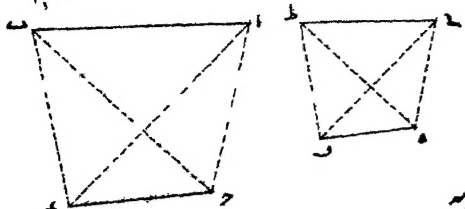
چنین شد ۴ و ۵ و ۶۰ پس از روی مقیاس بر صحرای کاغذ مثلث مدونه
را رسم نماییم بروی کاغذ که ضلع مدونه ۴ باشد و د را بقدر
۵۰ و زاویه د بمقدار ۵۰ درجه آنوقت خط مدونه را بمقیاس بخیم ۴۲ و ۳۲

خامنه

۱۰۸

و آن طول اب مطلوب است

مسئله ۳- میخواهیم بعد و نقطه غیر ممکن الوصول اب را مشخص کنیم



پس در فاصله بنای دما را
بر زمین کشیده ساختن می کنیم
و دو مثلث احد و ب حد را

بر آن توهم نموده و هر کدام دو زاویه

جانبین قائمه را با اسباب اندازه می گیریم و بعد در صفحه کاغذ با مقیاس خط ه و را مساوی

حد رسم می کنیم و دو مثلث ۱ ه ر و ط ه و را مشابه و مثلث احد و ب حد

و چون در نقطه ۲ و ط بدست آمد فاصله بین آنها را با مقیاس اندازه گرفته طول مطلوب

مسئله ۴- میخواهیم ارتفاع مناره اب را که وصول بمسقط الجحش ممکن باشد

مُتَحَقِّقْ کنیم پس در نقطه ط زاویه ارتفاع اط ۲ را با اسباب معلوم نموده ضلع ط

۲ را اندازه گرفته در صفحه کاغذ

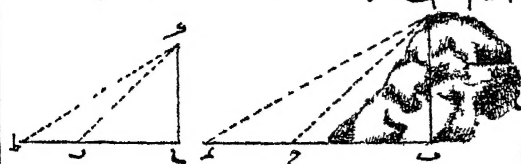
با مقیاس مثلث قائم الزاویه

ر ه و را مشابه با ح ط می سازیم و خط ر ه را با مقیاس اندازه گرفته قائم است اسباب

را بر آن فرو ده ارتفاع مطلوب است

مسئله ۵- میخواهیم معلوم کنیم ارتفاع بنه اب را که وصول بمسقط الجحش

ممکن نباشد



پس دو نقطه د و د را بر روی

زمین چنان اختیار نموده که با

رأس بنه در یک خط قائم باشند و فاصله بین آنها را اندازه گرفته و بعد در مثلث

موسوم احمد دوزاویه ارتفاع ادب و ادب را با بسباب اندازه گرفته اند
 برصفی کاغذ از روی مقیاس خط ط را برابر مد رسم نموده و قدری امتدادش
 داده تا نقطه ۲ و در دو نقطه ۱ و ۲ دوزاویه ۱۵ درجه و ۱۰ دقیقه را بر ط
 و ادب ساخته و دو ضلع را امتداد داده تا در نقطه ۳ متلاقئ شوند و از اینجا
 ۱۲ را بر ط عمود نموده طولش را با مقیاس اندازه گرفته ارتفاع مطلوب است

قدت فی يوم الاربعاء غرة شهر ربيع الاول
 سنة ۱۲۹۱
 مشهور به شهر ربيع الاول
 شهر ربيع الاول
 شهر ربيع الاول

داخله منبر	
فصل منبر	
کتاب منبر	۱ و ۲

